

## RECONSTRUCCION DE LAS CURVAS DE ESFUERZO-DEFORMACION A PARTIR DE DATOS DE CONDUCTIVIDAD ELECTRICA EN EXPERIMENTOS DE DEFORMACION TRIAXIAL EN ROCAS

J. B. Gómez Jiménez \*

### RESUMEN

La medida de la conductividad eléctrica compleja en función de la frecuencia en rocas durante los experimentos de deformación triaxial es una técnica muy sensible para determinar los cambios en el volumen de poros y grietas y en la conectividad y la topografía superficial de las grietas. Los datos experimentales de conductividad eléctrica registran la evolución deformacional de la roca desde la fase inicial en la que se pierde volumen por compactación, seguida de la fase de dilatación debido a la formación de nuevas grietas y al crecimiento y coalescencia de las preexistentes, hasta la rotura macroscópica de la muestra. Se han usado estos datos de conductividad eléctrica tomados en cuatro experimentos sobre muestras de arenisca Darley Dale para calcular un parámetro de densidad de grietas sensible a la dirección axial de las muestras y, a partir de él, se ha calculado el módulo de Young efectivo usando diversos modelos de sólidos fracturados (modelo sin interacción, modelo autoconsistente y modelo diferencial). Las curvas sintéticas esfuerzo-deformación resultantes muestran un buen acuerdo con las curvas experimentales, sobre todo para los ensayos no drenados. El método permite, además, calcular una serie de importantes parámetros microestructurales, como son la esfericidad inicial de las grietas y la contribución de las grietas a la porosidad total. Estos resultados mejoran los obtenidos por medio de datos de emisión acústica, que no son sensibles a la dirección.

**Palabras clave:** *Deformación triaxial, Rocas, Conductividad eléctrica, Curvas esfuerzo-deformación, Parámetro de densidad de grietas, Modelos de sólidos fracturados.*

### ABSTRACT

Measurements of complex electrical conductivity as a function of frequency is an extremely sensitive probe for changes in pore and crack volume, crack connectivity, and crack surface topography. Such measurements have been made as a function of pore fluid chemistry, hydrostatic confining pressure, as well as uniaxial and triaxial deformation. This paper develops a method for using such experimental conductivity data to model the mechanical properties of saturated rocks undergoing triaxial deformation. It does so by defining a new direction sensitive crack damage parameter derived from the electrical data on four samples of Darley Dale sandstone. More specifically this paper will: 1) review the theoretical concepts necessary to understand the modelling procedure (crack density parameter and effective elastic properties of cracked solids), 2) derive a new crack damage parameter from electrical conductivity data, 3) use the electrical data to model the mechanical stress-strain behavior of porous rocks, and 4) compare the modelled results with the stress-strain behavior measured during the deformation. The resultant synthetic stress-strain curves show good agreement with the experimentally derived stress-strain curves, and the estimated values of model parameters also compare well with their experimental counterparts. This modelling is an improvement on similar curves produced using isotropic crack damage parameters, such as those derived from acoustic emission data. The improvement is likely to be due to the directional sensitivity of the electrical conductivity measurement, and its ability to discriminate between the formation of isolated cracks, and those cracks that contribute to the interconnected crack space, *i.e.*, those cracks upon which both the transport properties of the rock such as electrical conductivity, and the mechanical properties depend most critically during triaxial deformation.

**Key words:** *Triaxial test, Rocks, Electrical conductivity, Stress-strain curves, Crack density parameter, Models of cracked solids.*

---

\* Departamento de Ciencias de la Tierra, Campus San Francisco, c/ Pedro Cerbuna, 12, Universidad de Zaragoza. 50009 Zaragoza, España. E-mail: jgomez@posta.unizar.es

## Introducción

La ruptura frágil de las rocas en compresión está precedida de la formación, el crecimiento y la coalescencia de microgrietas (Atkinson, 1987 y Lawn, 1993). Este proceso de acumulación de microgrietas se suele denominar *daño* y, así, un modelo de daño intenta predecir la evolución de la población de microgrietas en un material heterogéneo sometido a compresión. El cambio en la población de microgrietas durante la deformación produce un cambio paralelo en las propiedades elásticas del material. En los modelos de daño la población real de microgrietas se sustituye por un *parámetro de densidad de grietas* (PDG), que reúne en una representación escalar o tensorial el conjunto de propiedades de la población real de microgrietas. Cuando el parámetro de densidad de grietas se usa como una medida de la microfracturación que sufre un material en compresión como resultado de la aplicación de un campo de esfuerzos, se le suele denominar *parámetro de daño*. De aquí en adelante usaremos ambos términos (parámetro de densidad de grietas y parámetro de daño) como sinónimos.

Se han utilizado varias propiedades físicas para definir un parámetro de daño experimental. Entre ellas las más importantes son: *i)* los cambios en la velocidad de propagación de las ondas *P* y *S*, *ii)* los eventos de emisión acústica y *iii)* los cambios en la conductividad eléctrica en rocas saturadas.

Los parámetros de densidad de grietas basados en los cambios en las velocidades de las ondas elásticas son los más comunes en la literatura geofísica (O'Connell y Budiansky, 1974, Anderson *et al.*, 1974, Soga *et al.*, 1978, Sayers, 1988, Yukutake, 1989 y Ayling *et al.*, 1995). El método se basa en la relación que existe entre la velocidad de propagación de las ondas *P* y *S* y la porosidad. Como la porosidad debida a cavidades esféricas (poros) no cambia mucho a las presiones confinantes usadas en los experimentos de deformación frágil en el laboratorio (como se verá en detalle más adelante), la mayor parte de los cambios de porosidad están relacionados con el cierre y la apertura de grietas preexistentes y a la apertura de nuevas grietas (dilatancia). Por tanto, los cambios en las velocidades de propagación de las ondas elásticas se deben principalmente a variaciones en la población de microgrietas durante la deformación. El conocimiento de estos cambios de velocidad (tanto axiales como radiales) puede usarse para inferir los cambios en la densidad de microgrietas y, por tanto, sirve como un parámetro de daño. Además, la posibilidad de medir la velocidad de las ondas elásticas en tres direcciones perpendiculares permite calcular un parámetro de daño tensorial que proporciona mucha más infor-

mación que un simple parámetro de daño escalar (Sayers y Kachanov, 1995).

Cox y Meredith (1993) han introducido un parámetro de daño basado en medidas de emisión acústica, parámetro que luego ha sido utilizado por Sammonds *et al.* (1994) para reconstruir las curvas de esfuerzo-deformación en rocas deformadas triaxialmente. El término *emisión acústica* se usa para referirse a una onda elástica transitoria que se genera en un sólido por relajación brusca y localizada de esfuerzo o deformación y que acompaña a mecanismos de deformación como la nucleación y el crecimiento de microgrietas, la propagación de dislocaciones y el maclado (Meredith y Atkinson, 1983 y Glover *et al.*, 1996). Cox y Meredith hicieron una serie de suposiciones para derivar el parámetro de daño a partir del catálogo de emisión acústica: *i)* que existe una correspondencia uno a uno entre un evento de emisión acústica y la generación de una microfractura; *ii)* que el catálogo de emisión acústica es completo, y *iii)* que los eventos de emisión acústica se deben únicamente a la actividad de microfracturación y no a otras fuentes. Además, como los autores carecían de una relación cualitativa entre la magnitud de un evento de emisión acústica y el tamaño de la microfractura generada, el parámetro de daño debe ser normalizado arbitrariamente. Otros inconvenientes del método son que el parámetro de daño así definido sólo tiene en cuenta las grietas nuevas pero no el cierre o la reapertura elástica de microgrietas previas, que este parámetro de daño no es sensible a la dirección y que no es capaz de distinguir entre grietas aisladas o coalescentes.

Glover *et al.* (1996) han presentado un análisis preliminar de un parámetro de daño anisótropo derivado de medidas de conductividad eléctrica en rocas saturadas deformadas triaxialmente. La conclusión básica de este trabajo es que el método es potencialmente útil para estudiar los cambios en la población de microgrietas en una roca sometida a una deformación progresiva. Este artículo extiende este análisis preliminar y confirma la importancia que las medidas de conductividad eléctrica tienen para deducir la evolución del daño en una roca deformada en compresión.

El objetivo principal de este trabajo es examinar diferentes modelos teóricos de la evolución de los módulos elásticos de un sólido fracturado y combinar esta información con la procedente del parámetro de daño derivado de las medidas de conductividad eléctrica para ver si los cambios en la población de microgrietas se correlacionan con los cambios en los módulos elásticos de la roca (concretamente con el módulo de Young). La correlación se pone de manifiesto por la similitud entre las curvas esfuer-

zo-deformación experimentales y las reconstruidas sintéticamente mediante el parámetro de daño.

Antes de exponer el método de reconstrucción de las curvas de esfuerzo-deformación, es necesario revisar algunos conceptos teóricos sobre la definición del parámetro de daño y los modelos de sólidos fracturados para la estimación de los módulos elásticos efectivos.

### Modelización mecánica a partir del parámetro de daño

#### Conceptos generales

Las grietas son un tipo particular de heterogeneidad que las rocas pueden contener. Para fijar la terminología, una *inhomogeneidad* es cualquier subdominio con un módulo elástico distinto al del medio que lo rodea. Este medio circundante recibe el nombre de *matriz*. Una *inclusión* es una inhomogeneidad con al menos un módulo elástico distinto de cero y una *cavidad* es una inhomogeneidad con todos los módulos elásticos nulos.

Los términos *poro* y *hueco* se usarán indistintamente para hacer referencia a cavidades equidimensionales, es decir, a cavidades con todas sus dimensiones de longitud similar, y el término *grieta* para cavidades con una dimensión mucho más pequeña que las demás. Cuando se habla de cavidades con una geometría regular, se puede definir su forma de manera más rigurosa por medio de la esfericidad  $r$  ( $0 \leq r \leq 1$ ) de la cavidad, que es el cociente entre dos dimensiones ortogonales. En dos dimensiones la forma asumida normalmente en los modelos para las cavidades es la elíptica y en este caso la esfericidad es simplemente el cociente de los dos semiejes de la elipse. En tres dimensiones la geometría más habitual es la elipsoidal y en este caso se puede definir más de una esfericidad. Sin embargo, es normal asumir que dos semiejes son iguales (es decir, un esferoide), de manera que la esfericidad está también unívocamente definida. Para el caso de cavidades elipsoidales o esferoidales, un poro es una cavidad con una esfericidad próxima a uno ( $0,1 \leq r \leq 1$ ) y una grieta una cavidad con una esfericidad que tiende a cero (en la práctica,  $r \leq 0,01$ ). Una *ranura* es una grieta bidimensional de esfericidad estrictamente cero y una *grieta en moneda* es un esferoide oblató con una esfericidad que tiende a cero.

Las cavidades en una roca pueden estar vacías (cavidades *secas*) u ocupadas por un líquido (cavidades *saturadas*). Con esta terminología, una grieta seca es una inhomogeneidad tridimensional con su volumen reducido a una superficie y con sus módu-

los elásticos nulos. Un poro o hueco seco es simplemente una inhomogeneidad con módulos elásticos nulos. Las grietas y los poros ocupados por un líquido pueden considerarse casos particulares de inclusiones en las que sólo uno de los módulos elásticos es distinto de cero (el módulo de compresibilidad de fluido,  $K_f$ ).

El comportamiento mecánico de poros y grietas es muy diferente. Las grietas se pueden cerrar a presiones confinantes «normales» en los experimentos de deformación frágil ( $\leq 100$  MPa), mientras que los poros permanecen abiertos a esas presiones, necesitando esfuerzos compresivos del orden del módulo de Young del material para cerrarse ( $\approx 10$  GPa). Además, las grietas con baja esfericidad ( $r \rightarrow 0$ ) se cerrarán antes que las grietas con esfericidad mayor. Para el caso de esferoides oblatos, cuyos dos casos límite son de interés aquí ( $r = 1$  para poros y  $r = 0$  para grietas), se puede calcular la presión de cierre  $P^*$  (el esfuerzo al que una cavidad de esfericidad inicial  $r$  se cerrará completamente) a partir de la expresión de Zimmerman (1985) para la compresibilidad de un sólido con cavidades esferoidales oblatas bajo compresión hidrostática. La expresión para la presión de cierre es:

$$P^* = \left\{ \frac{1}{K_0} + \frac{(1+3R)[1-2(1-\nu_0)R+3r^2]-2(1-2\nu_0)(1+2R)}{4\mu_0[(1+3R)r^2+(1+R)(\nu_0+\nu_0R)]} \right\}, \quad (1)$$

donde  $R = -(1-r^2)^{-1} + r(1-r^2)^{-3/2} \arcsin(1-r^2)^{1/2}$  y  $\mu_0$  es el módulo de rigidez de la matriz. Para esfericidades bajas ( $r \rightarrow 0$ ) Zimmerman da una aproximación muy útil para la compresibilidad de los poros:

$$P^* = \frac{\pi E_0}{4(1-\nu_0^2)} r, \quad \text{cuando } r \rightarrow 0, \quad (2)$$

lo que implica que la presión de cierre de una grieta en moneda aislada es directamente proporcional a su esfericidad. La figura 1 muestra la presión hidrostática necesaria para cerrar cavidades con esfericidades entre  $10^{-3}$  y 1, ecuación (1), para un sólido con  $E_0 = 10, 15, 20$  GPa y  $\nu_0 = 0,15, 0,30$ , valores típicos para muchas areniscas ricas en cuarzo como la que se usó en los experimentos de deformación en este estudio (Glover *et al.*, 2000). De la observación de la figura se desprenden tres conclusiones importantes: *i*) la débil influencia del coeficiente de Poisson en la presión de cierre (las parejas de líneas de puntos y continuas se diferencian en un factor 2 en el coeficiente de Poisson); *ii*) la aproximación lineal dada por la ecuación (2) es muy buena hasta esfericidades bastante altas ( $r \leq 0,3$ ), y *iii*) hay una diferencia de unos dos órdenes y medio

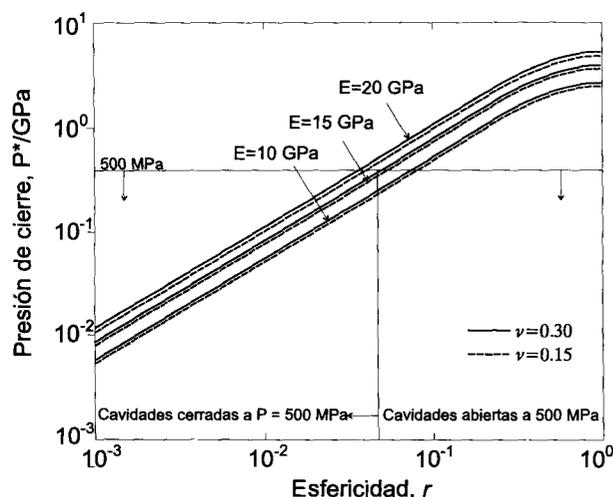


Fig. 1.—Presión crítica necesaria para cerrar cavidades (poros y grietas) de esfericidad inicial  $r$ . Se dan tres conjuntos de curvas, cada uno para un módulo de Young de la matriz diferente. Para cada conjunto, la línea continua es para un coeficiente de Poisson de  $\nu_0 = 0,30$  y la línea de puntos para  $\nu_0 = 0,15$ . La línea horizontal marca la presión confinante máxima usada en los experimentos de deformación en condiciones frágiles. La intersección de esta línea con las curvas de la presión de cierre da la esfericidad máxima de las cavidades que se cerrarán durante un experimento de deformación.

de magnitud entre las presiones de cierre de las grietas y los poros, entendiendo por «grieta» las cavidades con una esfericidad  $r < 0,01$ , que es una buena aproximación para la esfericidad de las microgrietas en muchas rocas (Zimmerman, 1991). En la figura se muestra también la máxima presión confinante usada en los experimentos de deformación frágil en el laboratorio ( $P_c \leq 0,5$  GPa). De ahí se deduce que las grietas con una esfericidad  $r > 0,1$  van a permanecer abiertas durante la deformación de las muestras, mientras que las microgrietas con una esfericidad menor se cerrarán al aumentar la presión confinante. Como se verá más adelante, esta propiedad de cierre selectivo de las microgrietas en función de su esfericidad se puede usar para analizar el espectro de esfericidades inicial de las microgrietas en la muestra.

También hay que tener en cuenta el diferente comportamiento mecánico de las rocas secas y las saturadas. Una roca *seca* es aquella que tiene sus cavidades ocupadas por un gas, normalmente aire, y una roca *saturada* es la que tiene sus cavidades parcial o totalmente ocupadas por un líquido, normalmente una solución acuosa (o tal vez petróleo). El aire puede considerarse como un fluido con un módulo de compresibilidad despreciable; el agua, sin embargo, es un fluido con un módulo volumétrico no nulo y dependiente de la temperatura, lo que

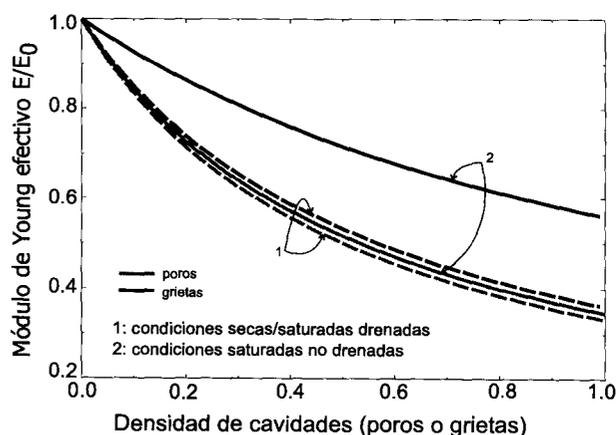


Fig. 2.—Comportamiento de poros (curvas en gris) y grietas (curvas en negro) tridimensionales no interactuantes en condiciones secas/drenadas (curvas de trazos) y no drenadas (curvas continuas). El comportamiento de los poros (cavidades equidimensionales) es muy similar en condiciones secas/drenadas y en condiciones no drenadas, lo que se pone de manifiesto por la cercanía y paralelismo de ambas curvas. Sin embargo, las grietas presentan un comportamiento mecánico muy distinto en condiciones secas/drenadas y no drenadas: en el primer caso su comportamiento es muy similar al de los poros, mientras que en condiciones no drenadas actúan como si estuvieran ocupadas por un material muy incompresible, aumentando mucho el módulo de Young efectivo de la roca.

modifica sustancialmente las propiedades mecánicas de la roca saturada (O'Connell y Budiansky, 1974). Los experimentos de deformación con muestras saturadas son de dos tipos: *i) drenados*, cuando se permite al fluido entrar y salir libremente de la roca conforme varía el esfuerzo aplicado, lo que hace que la presión de fluidos se mantenga constante, y *ii) no drenados*, en los que la masa total de fluido dentro de la muestra permanece constante y la presión del fluido cambia con la deformación. En el límite de condiciones totalmente drenadas, el comportamiento mecánico de una roca saturada es idéntico al que tiene en condiciones secas (si no se tienen en cuenta los procesos de interacción agua-roca que el fluido puede ejercer sobre la matriz en las inmediaciones de las grietas). En condiciones completamente no drenadas (y usando una solución acuosa como fluido saturante) los poros se comportan como si estuvieran vacíos (el caso seco), mientras que las grietas se comportan como si estuvieran ocupadas por un fluido incompresible (Kachanov, 1992). (Esto sólo es cierto si el agua está a temperatura ambiente, ya que a mayor temperatura el módulo de compresibilidad del agua disminuye rápidamente, por lo que también disminuye su impacto sobre el módulo elástico efectivo de la roca, O'Connell y Budiansky, 1974). Todo esto se muestra en la figura 2.

### Definición del parámetro de daño

El concepto de parámetro de daño o parámetro de densidad de grietas fue introducido por Bristow (1960) y Walsh (1965a, 1965b), que lo definieron como:

$$\chi_{2D} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{n_f} l_i^2 \quad (3)$$

en dos dimensiones (2D) y

$$\chi_{3D} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{n_f} l_i^3 \quad (4)$$

en tres dimensiones (3D). En el caso bidimensional  $A$  es un área representativa,  $n_f$  es el número de microgrietas en el área representativa y  $l_i$  es el semieje de la grieta  $i$ -ésima. En tres dimensiones,  $V$  es un volumen representativo, en el cual hay  $n_f$  grietas de radios  $l_i$ . Algunas definiciones del PDG incluyen un factor constante en la definición,

$$\chi'_{2D} = \frac{\pi}{A} \sum_{i=1}^{n_f} l_i^2 \quad (5)$$

y

$$\chi'_{3D} = \frac{4}{3} \frac{\pi}{V} \sum_{i=1}^{n_f} l_i^3. \quad (6)$$

Con esta definición, la densidad de grietas representa el área relativa de círculos con un diámetro igual al eje mayor de la grieta en el caso 2D y el volumen relativo de esferas que tienen las grietas como diámetros en el caso 3D.

Budiansky y O'Connell (1993) generalizaron el PDG para el caso de grietas tridimensionales no circulares:

$$\chi'_{3D} = \frac{2}{\pi} \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{n_f} \left( \frac{A^2}{L} \right)_i, \quad (7)$$

donde  $A$  es el área de la grieta y  $L$  su perímetro. Para grietas en moneda ( $l_1 = l_2 = l$ ,  $l_3 \rightarrow 0$ ) tenemos que  $A = \pi l^2$ ,  $A^2/L = \pi l^3/2$ , con lo que recuperamos la ecuación (4).

Las ecuaciones (3)-(7) son ejemplos de PDG *escalares*; es decir, un solo valor,  $\chi$ , define el estado de daño de la roca, promediado sobre las variaciones que puede introducir la anisotropía, sobre todo orientaciones espaciales no aleatorias de las microgrietas. Para evitar esta limitación, Kachanov (1980) introdujo un PDG *tensorial*,  $\alpha$ . Este nuevo PDG es un tensor de segundo rango,

$$\alpha_{ij}^{2D} = \frac{1}{A} \sum_{k=1}^{n_f} (l^2 n_i n_j)_k \quad (8)$$

en dos dimensiones y

$$\alpha_{ij}^{3D} = \frac{1}{V} \sum_{k=1}^{n_f} (l^3 n_i n_j)_k \quad (9)$$

en tres dimensiones, donde  $n_i$  es el vector unitario normal a la superficie de la grieta. La formulación tensorial permite unificar el tratamiento de poblaciones de grietas con orientaciones arbitrarias, evitando el promediado sobre las diferentes orientaciones. Esta última operación se sustituye por la resolución de un problema de valores propios para un tensor de segundo rango, que es más sencillo en muchas aplicaciones prácticas [ver Kachanov (1992, 1993) para más detalles]. Como  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{1}$ , la traza  $\text{tr} \alpha = \alpha_{kk}$  de los tensores (8) y (9) es el PDG escalar convencional,

$$\text{tr} \alpha_{2D} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{n_f} l_i^2 = \chi_{2D} \quad (10)$$

y

$$\text{tr} \alpha_{3D} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^{n_f} l_i^3 = \chi_{3D}. \quad (11)$$

Es decir,  $\alpha$  es la extensión tensorial natural de  $\chi$  que tiene en cuenta la orientación de las microgrietas. El tensor de densidad de grietas  $\alpha$  es simétrico y, por tanto, se puede representar en función de sus componentes principales  $\alpha = \chi_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \chi_2 \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \chi_3 \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$  ( $\chi_1$ ,  $\chi_2$  y  $\chi_3$  son los valores propios de  $\alpha$  y  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  y  $\mathbf{e}_3$  son vectores unitarios). Cada término en esta expresión representa una familia de grietas paralelas, lo que implica que cualquier sistema de grietas es totalmente equivalente, en su impacto sobre los módulos efectivos, a tres familias ortogonales de grietas (Kachanov, 1992).

Kachanov (1993, 1994b, 1994a) también ha definido un parámetro de densidad de poros (PDP) para trabajar con sólidos que contienen tanto cavidades elipsoidales de esfericidad alta (poros) como grietas. El PDP escalar,  $\eta$ , se define como:

$$\eta_{2D} = \frac{\pi}{A} \sum_{i=1}^{n_h} (ab)_i \quad (12)$$

en dos dimensiones y

$$\eta_{3D} = \frac{4}{3} \frac{\pi}{V} \sum_{i=1}^{n_h} (abc)_i \quad (13)$$

en tres dimensiones. Aquí,  $n_h$  es el número de poros en el área o volumen unidad y  $a$ ,  $b$  y  $c$  son los semiejes de la elipse (2D) o elipsoide (3D) mediante los cuales se aproxima el poro real. Existe, por supuesto, una generalización tensorial del PDP: el tensor de densidad de poros,  $\beta$ ,

$$\beta_{ij}^{2D} = \frac{\pi}{A} \sum_{k=1}^{n_h} (a^2 n_i n_j + b^2 m_i m_j)_k \quad (14)$$

y

$$\beta_{ij}^{3D} = \frac{4\pi}{3V} \sum_{k=1}^{n_h} (a^2 n_i n_j + b^2 m_i m_j + c^2 l_i l_j)_k, \quad (15)$$

en dos y tres dimensiones, respectivamente. En estas ecuaciones  $n_i$ ,  $m_i$  y  $l_i$  son vectores unitarios perpendiculares a la superficie de las grietas. El tensor  $\beta$  puede considerarse también como una generalización del tensor de densidad de grietas  $\alpha$  y se reduce a él cuando  $b \rightarrow 0$  (en dos dimensiones) o  $a \rightarrow b$  y  $c \rightarrow 0$  en tres dimensiones. Para poros circulares (2D) y esféricos (3D),  $\beta$  es proporcional al tensor unitario  $\mathbf{I}$  y es equivalente al PDP bi y tridimensional, respectivamente (ecuaciones 12 y 13).

#### *Relación entre porosidad de grietas y densidad de grietas*

A partir de las ecuaciones (3) y (4) podemos adquirir una mejor idea del significado cualitativo del parámetro de densidad de grietas. Si asumimos que la roca contiene  $n_f$  grietas de la misma semilongitud  $l$  (o, alternativamente,  $n_f$  grietas de semilongitud media  $\bar{l}$ , cuyo tamaño es independiente de su orientación), podemos describir (3) y (4) como

$$\chi_{2D} = \frac{n_f l^2}{A} = \frac{n_f \bar{l}^2}{A} \quad (16)$$

y

$$\chi_{3D} = \frac{n_f l^3}{V} = \frac{n_f \bar{l}^3}{V}, \quad (17)$$

lo que indica que la densidad de grietas es una medida del área (volumen) fraccional ocupado por cuadrados (cubos) cuyos lados son la semilongitud de la grieta,  $l$ . Si usamos las ecuaciones (5) y (6) en lugar de (3) y (4) como definición de densidad de grietas, entonces el PDG es una medida del área (volumen) fraccional ocupado por círculos (esferas) que tienen las grietas como diámetros. En este sen-

tido es fácil ver que los conceptos de porosidad de grietas y densidad de grietas, aunque relacionados, no son idénticos. Para verlo, considérese un sólido tridimensional con grietas en moneda de radio  $l$  y esfericidad  $r = c/l$ , donde  $c$  es el semieje más pequeño. Si hay  $n_f$  grietas en un volumen  $V$ , la porosidad  $\phi$  de la roca será

$$\phi = \frac{4\pi}{3V} n_f l^2 c \quad (18)$$

o, expresada en términos de la esfericidad  $r$ ,

$$\phi = \frac{4\pi}{3V} n_f l^3 r. \quad (19)$$

Comparando este resultado con la ecuación (17) para la densidad de grietas de semieje  $l$ , obtenemos un cociente porosidad/densidad de

$$\frac{\phi}{\chi} = \frac{4}{3} \pi r. \quad (20)$$

Es decir, el cociente  $\phi/\chi$  es proporcional a la esfericidad de las grietas, lo que implica que es necesario un conocimiento de la esfericidad media de las microgrietas en una roca si queremos usar los datos de porosidad como un parámetro de densidad de grietas. Más adelante se introducirá un método indirecto para calcular el espectro de esfericidades de las grietas de una muestra.

En cuanto al parámetro de densidad de poros, de la comparación de las ecuaciones (14) y (15) con la definición de porosidad se desprende que para los poros los conceptos de densidad y porosidad son equivalentes, es decir,  $\eta = \phi$ , independientemente de la esfericidad del poro. La figura 3 muestra de forma gráfica simplificada los conceptos de densidad y porosidad, tanto para grietas como para poros, para una porosidad y una densidad del 10 %.

En las siguientes secciones se usará la ecuación (4) como definición operativa del PDG para convertir los datos experimentales de porosidad en datos de densidad, después de sustraer de la porosidad total la contribución de las cavidades equidimensionales (poros). La ecuación (13) será la que se use como parámetro de densidad de poros.

#### *Modelos de sólidos fracturados*

Varios autores han desarrollado modelos para relacionar, por medio de un parámetro de daño, el cambio en las propiedades elásticas de un sólido con la cantidad de microgrietas. Algunos de estos modelos tienen en cuenta de forma explícita la ani-

sotropía [por ejemplo Hoenig (1979), Kachanov (1980), Hudson (1986), Sayers y Kachanov (1991) y Cheng (1993)]; otros asumen una orientación aleatoria de las grietas dentro del sólido y optan por una formulación escalar (Walsh, 1965a, 1965b, O’Connell y Budiansky, 1974, Budiansky y O’Connell, 1976, Bruner, 1976, Henyey y Pomphrey, 1982, Kemeny y Cook, 1986).

En este artículo se van a usar los siguientes modelos isotropos de sólidos fracturados para invertir los datos de conductividad eléctrica: 1) modelo de grietas no interactuantes (Walsh, 1965b); 2) modelo autoconsistente (O’Connell y Budiansky, 1974), y 3) modelo diferencial (Bruner, 1976).

Para adquirir una mejor visión de los conceptos que están detrás del proceso de inversión (que será explicado en el siguiente apartado), el resto de esta sección se dedica a hacer una breve derivación de los modelos sin interacción, autoconsistente y diferencial.

Modelo sin interacción

Vamos a considerar modelos de sólidos tridimensionales con microgrietas en moneda orientadas y distribuidas al azar, tanto secas como saturadas con agua (el caso seco se aplica tanto a experimentos secos como a experimentos drenados; el caso saturado se aplica sólo a experimentos no drenados). Probablemente la derivación más directa de estos modelos sea la de Walsh (1965a, 1965b). El objetivo aquí es calcular el aumento en la densidad de energía de deformación  $\Delta w$  de un sólido debido a la presencia de una sola grieta en moneda, asumiendo una matriz elástica homogénea, y luego añadir esa energía a la densidad de energía de un sólido sin grieta,  $w_0$ :

$$w = w_0 + \Delta w, \tag{21}$$

donde  $w$  es la densidad de energía de deformación elástica para el sólido fracturado. Para una matriz isotropa de módulo de Young  $E_0$  y coeficiente de Poisson  $\nu_0$ ,

$$w_0 = \frac{1 + \nu_0}{2E_0} \sigma_{ij} \sigma_{ij} - \frac{\nu_0}{2E_0} \sigma_{kk}^2. \tag{22}$$

Esta ecuación se simplifica a  $w_0 = \sigma_{33}^2/2E_0$  en un campo de esfuerzos uniaxial  $\sigma_{33}$ .

En el modelo de Walsh para un sólido fracturado, el módulo de Young de un cuerpo que contiene muchas grietas se calcula separando el cuerpo en regiones, de forma que cada región contiene una sola grieta, y asumiendo que los esfuerzos aplicados en el contorno de cada región son los mismos que los aplicados macroscópicamente en los límites

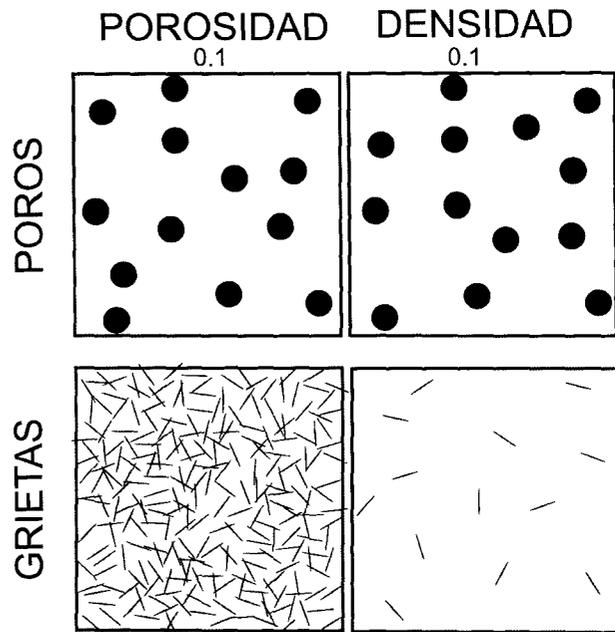


Fig. 3.—Representación esquemática de la diferencia entre los conceptos de densidad (de poros/grietas) y porosidad. Explicación en el texto.

externos del sólido. La contribución de cada grieta a la deformación total se calcula simplemente sumando el aumento de la densidad de energía de cada grieta por separado (fig. 4a). Esta simplificación (asumir que los esfuerzos alrededor de cada grieta son iguales a los esfuerzos externos aplicados) es necesaria para poder resolver analíticamente las ecuaciones resultantes y es la responsable de que el método tenga, en principio, su validez limitada a densidades pequeñas de grietas. Una vez que la interacción entre grietas vecinas empieza a ser importante, el supuesto de que cada grieta «siente» un campo de esfuerzos a su alrededor igual al campo externo aplicado deja de ser aceptable (sin embargo, Kachanov, 1992 ha demostrado que las grietas, si están distribuidas y orientadas al azar, no cambian el esfuerzo medio macroscópico dentro del sólido, lo que implica que el método sin interacción puede ser también válido para mayores densidades de grietas).

Walsh derivó la expresión general para el módulo de Young efectivo de un cuerpo con cavidades de forma y orientación arbitrarias haciendo uso del teorema de reciprocidad de Betti. Los detalles se pueden encontrar en el Apéndice A. La ecuación final tiene la forma:

$$\frac{E}{E_0} = \left\{ 1 + \frac{16(1 - \nu^2)(10 - 3\nu_0)}{45E_0(2 - \nu_0)} \chi \right\}^{-1}. \tag{23}$$

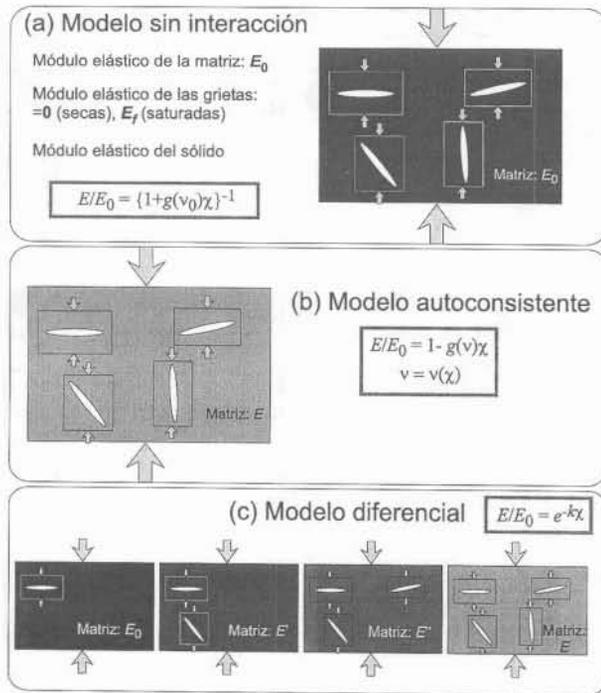


Fig. 4.—Diferencias básicas entre los tres modelos de sólidos fracturados descritos en el texto a) modelo sin interacción, b) modelo autoconsistente y c) modelo diferencial.  $E_0$  es el módulo de Young del sólido sin fracturas,  $E$  el módulo de Young del sólido con todas las microgrietas y  $E'$ ,  $E''$ , etc., los módulos de Young de un sólido con un número progresivamente mayor de grietas. Además,  $g(v)$  es una función que sólo depende del coeficiente de Poisson del sólido con grietas  $v$  o de la matriz  $v_0$  y  $\chi$  es el parámetro de daño.

Esta ecuación es la expresión para el cambio en el módulo de Young efectivo de un sólido 3D que contiene grietas en moneda no interactuantes, secas y distribuidas al azar. Es una de las ecuaciones que usaremos posteriormente para invertir los datos de conductividad eléctrica y reconstruir las curvas de esfuerzo-deformación experimentales. La ecuación (23), junto con las correspondientes ecuaciones para los modelos autoconsistente y diferencial que veremos a continuación (tanto para el caso seco como para el saturado) está recogida en la tabla 1.

Para grietas en moneda saturadas de agua, el límite sin interacción puede calcularse considerando el acoplamiento entre los esfuerzos y la presión del fluido (asumiendo condiciones no drenadas), tal como fue propuesto inicialmente por Budiansky y O'Connell (1976) en el contexto de la aproximación autoconsistente. Kachanov (1992) ha usado un método similar aunque más simple, que tiene la ventaja adicional de ser aplicable a cualquier orientación de la población de microgrietas. De nuevo, los detalles de la derivación se dejan para el Apéndice A. El resultado final es:

$$\frac{E}{E_0} = \left\{ 1 + \frac{64(1 - v^2)}{45(2 - v_0)} \chi \right\}^{-1}, \quad (24)$$

que es la versión sin interacción del módulo de Young efectivo de un sólido con grietas en moneda saturadas de agua. Esta ecuación también está recogida en la tabla 1.

Modelo autoconsistente

El primer modelo autoconsistente de un sólido fracturado fue presentado por O'Connell y Budiansky (1974, 1976). Muy resumido, el método intenta tener en cuenta las interacciones entre grietas asumiendo que éstas están incluidas en un medio que tiene las propiedades elásticas del sólido fracturado en vez de las propiedades de la matriz como ocurría en el modelo anterior. La figura 4b presenta esquemáticamente la idea que hay detrás del método autoconsistente. En la práctica, estos autores usaron un método muy similar al de Walsh (1965a, 1965b) pero sustituyendo los módulos elásticos de la matriz,  $E_0$  y  $v_0$ , por los módulos efectivos  $E$  y  $v$ . El resultado es:

$$\frac{E}{E_0} = 1 - \frac{16(1 - v^2)(10 + 3v_0)}{45E_0(2 - v_0)} \chi. \quad (25)$$

La ecuación (25) es una ecuación no lineal en  $E$  y  $v$  que necesita ser resuelta conjuntamente con otra ecuación para  $v$ . Su deducción se puede encontrar en O'Connell y Budiansky (1974) y, una vez despejado  $\chi$ , tiene la forma:

$$\chi = \frac{45}{16} \frac{(v_0 - v)(2 - v)}{(1 - v^2)[10v_0 - v(1 + 3v_0)]}. \quad (26)$$

O'Connell y Budiansky (1974) han puesto de manifiesto que la función  $v(\chi)$  es casi lineal y puede aproximarse mediante la ecuación:

$$v = v_0 \left( 1 - \frac{16}{9} \chi \right), \quad (27)$$

lo que permite un cálculo mucho más simple del módulo de Young efectivo a partir de la ecuación (25). Tanto la ecuación (25) como la (27) aparecen en la tabla 1.

La aproximación autoconsistente para grietas saturadas, también deducida por O'Connell y Budiansky (1974), puede calcularse rápidamente a partir de la ecuación (A8) del Apéndice A reemplazando  $E_0$  y  $v_0$  por  $E$  y  $v$ . El resultado para grietas en moneda es:

$$\frac{E}{E_0} = 1 - \frac{64(1 - v^2)}{45(2 - v)} \chi, \quad (28)$$

Tabla 1.—Modelos isotrópicos de sólidos 3D con grietas en moneda.

Modelo		Módulo efectivo	Ec. número	Referencias
Sin interacción	seco	$\frac{E}{E_0} = \left\{ 1 + \frac{16(1 - \nu_0^2)(10 - 3\nu_0)}{45(2 - \nu_0)} \chi \right\}^{-1}$	(23)	Walsh (1965)
	sat.	$\frac{E}{E_0} = \left\{ 1 + \frac{64(1 - \nu_0^2)}{45(2 - \nu_0)} \chi \right\}^{-1}$	(24)	Walsh (1965)
Autoconsistente	seco	$\frac{E}{E_0} = 1 - \frac{16(1 - \nu^2)(10 - 3\nu)}{45(2 - \nu)} \chi$	(25)	Budiansley y O'Connell (1976) O'Connell y Budiansky (1974)
		$\nu = \nu_0 \left( 1 - \frac{16}{9} \chi \right)$	(27)	Budiansley y O'Connell (1976) O'Connell y Budiansky (1974)
	sat.	$\frac{E}{E_0} = 1 - \frac{64(1 - \nu^2)}{45(2 - \nu)} \chi$	(28)	Budiansley y O'Connell (1976) O'Connell y Budiansky (1974)
		$\nu = \nu_0 - \frac{16}{45}(1 - 2\nu_0)\chi$	(30)	Budiansley y O'Connell (1976) O'Connell y Budiansky (1974)
Diferencial	seco	$\frac{E}{E_0} = e^{-16\chi/9}$	(33)	Bruner (1976)
	sat.	$\frac{E}{E_0} = e^{-32\chi/45}$	(36)	Bruner (1976)

que se resuelve simultáneamente con

$$\chi = \frac{45 (\nu_0 - \nu)(2 - \nu)}{32 (1 - \nu^2)(1 - 2\nu_0)} \quad (29)$$

para obtener el módulo de Young efectivo de un sólido con una población de grietas en moneda con orientación aleatoria y saturadas de agua. La función en la ecuación (29) se comporta de una forma bastante lineal en el rango  $0 \leq \chi \leq \chi_c$  (donde  $\chi_c$  es el valor de  $\chi$  para el que  $\nu = 0$ ) y puede aproximarse muy satisfactoriamente mediante la ecuación

$$\nu = \nu_0 - \frac{16}{45}(1 - 2\nu_0)\chi. \quad (30)$$

Las ecuaciones (28) y (30) también se recogen en la tabla 1.

### Modelo diferencial

El método diferencial de Bruner (1976) para el cálculo de los módulos efectivos de sólidos fracturados se basa en una modificación del modelo autoconsistente. Bruner (1976) [y también Henyey y

Pomphrey (1982)] han puesto de manifiesto que el método autoconsistente puede, en ocasiones, sobreestimar las interacciones entre grietas. Su alternativa, el modelo diferencial, aumenta en pequeños incrementos la densidad de grietas y las propiedades elásticas se recalculan incrementalmente en el proceso. Las grietas se añaden de una en una y el módulo elástico del material al que se van añadiendo nuevas grietas no es el del sólido intacto (como está implícito en el método autoconsistente de O'Connell y Budiansky), sino que varía entre este, cuando se añade la primera grieta, y el del sólido totalmente fracturado, cuando se añade la última grieta (véase la fig. 4c). Bruner basó su método en la solución elástica de una grieta en moneda aislada en un medio tridimensional infinito y asumió, al igual que O'Connell y Budiansky, que la orientación espacial de las grietas es aleatoria.

Las ecuaciones resultantes que relacionan las propiedades efectivas con la densidad de grietas están escritas en forma diferencial y de ahí el nombre del método. Para el módulo de Young efectivo la ecuación tiene la forma:

$$\frac{dE}{d\chi} = -\frac{16 (1 - \nu^2)(10 - 3\nu)}{45 (2 - \nu)} E, \quad (31)$$

que puede derivarse directamente de (23), su homóloga para el método sin interacción, diferenciándola con respecto al parámetro de daño  $\chi$  y sustituyendo  $E_0$  y  $\nu_0$  por  $E$  y  $\nu$ . Se necesita otra ecuación para estimar el cambio del coeficiente de Poisson efectivo con  $\chi$ . Bruner (1976) da la siguiente expresión:

$$\frac{d\nu}{d\chi} = -\frac{16(1-\nu^2)(3-\nu)}{45(2-\nu)}\nu. \quad (32)$$

La ecuación (31) no puede resolverse analíticamente debido a su no linealidad, pero se puede resolver numéricamente sin ninguna dificultad. Bruner la resolvió de forma aproximada, al constatar que tanto  $E$  como  $\nu$  son dos funciones suaves y no negativas de  $\chi$ , reemplazando cada función por su valor  $\nu = 0$  antes de integrar (31). El resultado es:

$$\frac{E}{E_0} = \exp^{-16\chi/9}, \quad (33)$$

que es la aproximación diferencial al módulo de Young efectivo de un sólido tridimensional con una población de grietas secas en moneda. La ecuación (33) también se recoge en la tabla 1.

La aproximación diferencial para grietas saturadas también se debe a Bruner (1976). Se puede llegar a ella diferenciando directamente la ecuación (24) con respecto al parámetro de densidad de grietas y reemplazando de nuevo  $E_0$  y  $\nu_0$  por  $E$  y  $\nu$ . El resultado es:

$$\frac{dE}{d\chi} = -\frac{16(1-\nu^2)}{45(2-\nu)}E, \quad (34)$$

que tiene que resolverse conjuntamente con la ecuación que expresa la variación del coeficiente de Poisson con  $\chi$  (Bruner, 1976),

$$\frac{d\nu}{d\chi} = \frac{32(1-\nu^2)(1-2\nu)}{45(2-\nu)}\nu. \quad (35)$$

La función de  $\nu$  en (35) sólo varía en un 7 % en el rango  $0 \leq \nu \leq 1/2$ , lo que permite resolver de forma aproximada las ecuaciones (34) y (35) reemplazando esta función por su valor en  $\nu = 1/2$ , obteniéndose el resultado

$$\frac{E}{E_0} = \exp^{-32\chi/45}. \quad (36)$$

La ecuación (36), recogida en la tabla 1, será la que usemos para las grietas saturadas cuando apliquemos el modelo diferencial.

Kachanov (1992, 1993) ha mostrado que la aproximación de grietas sin interacción puede seguir siendo válida para densidades altas de grietas. La

razón subyacente radica en el hecho de que la introducción de grietas en un sólido no cambia el esfuerzo medio al que está sometido si se expresan las condiciones de contorno en forma de tracciones. Es decir, el efecto macroscópico de la amplificación y el apantallamiento de esfuerzos que se produce entre grietas dependiendo de su orientación, su distancia y su entorno, se cancela mutuamente en promedio. Este importante resultado sólo es válido cuando la localización de los centros de las grietas es aleatoria (Kachanov, 1992).

Esta conclusión está en contradicción de las predicciones de los métodos basados en el concepto de matriz efectiva (es decir, los métodos autoconsistente y diferencial). Los esquemas de matriz efectiva, como hemos visto, calculan el cambio en los módulos efectivos de un sólido fracturado emplazando una grieta en una matriz con una rigidez siempre menor que la original del sólido no fracturado. Se asume que esta reducción en el módulo elástico se debe a la presencia de las demás grietas. Por tanto, estos métodos predicen que la rigidez efectiva es siempre más pequeña que la calculada por el método sin interacción, lo que implica que la interacción *siempre* reduce los módulos elásticos de los sólidos fracturados. Una de nuestras intenciones al usar diferentes modelos de sólidos fracturados es la de comprobar si existe una mejora sustancial en las predicciones hechas con los modelos de matriz efectiva respecto al modelo sin interacción, cuando la densidad de grietas es grande.

### Procedimiento de inversión de las curvas de esfuerzo-deformación

Podemos resumir convenientemente el procedimiento para invertir las curvas esfuerzo-deformación en los siguientes tres puntos: 1) definición de un parámetro de daño basado en los datos de conductividad eléctrica, 2) uso del parámetro de daño así definido como entrada para un modelo de las propiedades elásticas de un sólido fracturado y 3) reconstrucción de las curvas de esfuerzo-deformación y comparación con las curvas experimentales. La figura 5 es un resumen en forma de diagrama de flujo de los pasos más importantes del procedimiento (rectángulos), los conceptos teóricos en los que se basa (elipses) y los datos experimentales de los que se nutre (rectángulos con los vértices redondeados).

El algoritmo propuesto calcula el módulo de Young efectivo normalizado  $E/E'$  (donde  $E'$  es el módulo efectivo del sólido sin grietas pero con poros) en función del parámetro de daño  $\chi$ . Para comparar estos valores con los datos experimentales de esfuerzo-deformación necesitamos tres elementos

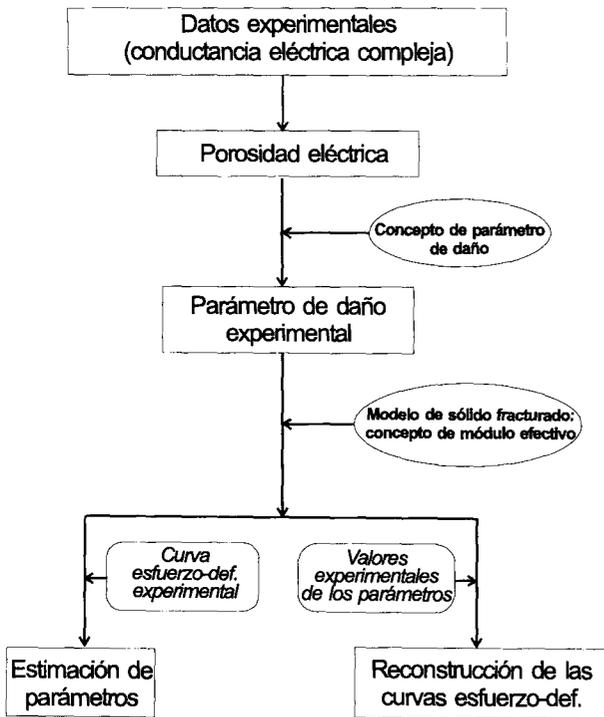


Fig. 5.—Diagrama de flujo del proceso de inversión. Los pasos principales están representados como rectángulos, las elipses muestran los conceptos teóricos en los que se basa el procedimiento y los rectángulos con bordes redondeados representan datos experimentales usados para verificar el procedimiento.

más de información: *i*) el valor del módulo de Young «intrínseco»  $E'$ , *ii*) el valor de la deformación axial permanente  $\epsilon_0$ , tras descargar la muestra antes del límite plástico (esta deformación permanente es debida al cierre irreversible inicial de poros y grietas y disminuye al aumentar la presión confinante), y *iii*)  $\chi$  en función de la deformación axial  $\epsilon_a$ .

Los dos primeros elementos de la lista pueden obtenerse directamente de las curvas esfuerzo-deformación experimentales, tal y como se muestra en la figura 6, mientras que el tercer elemento se trata en detalle en la siguiente sección.  $E'$ , el módulo de Young «intrínseco» se calcula como la pendiente de la parte recta de la curva de esfuerzo-deformación. La deformación permanente  $\epsilon_0$  es el valor de la deformación al que la parte recta de la curva esfuerzo-deformación cortaría al eje de deformación si la extendiéramos. De la figura 6 se deduce inmediatamente

$$\sigma_a = \sigma_0 + E' \epsilon_a \quad (37)$$

y

$$\epsilon_0 = -\frac{\sigma_0}{E'}, \quad (38)$$

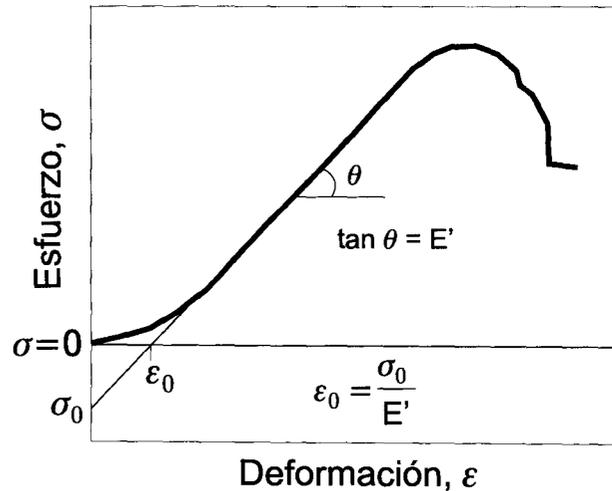


Fig. 6.—Parámetros necesarios para relacionar las curvas esfuerzo-deformación experimentales con las sintéticas.

donde  $\sigma_a$  es el esfuerzo axial y  $\sigma_0$  el corte de la prolongación hasta deformación cero de la parte recta de la curva esfuerzo-deformación.

Una vez hemos calculado estos parámetros, las curvas esfuerzo-deformación sintéticas se pueden expresar como

$$\sigma_a^{\text{mod}} = \left[ \left( \frac{E^{\text{mod}}}{E'} \right) \epsilon_a^{\text{mod}} \right] E' - \sigma_0, \quad (39)$$

$$\epsilon_a^{\text{mod}} = \epsilon_a^{\text{exp}}, \quad (40)$$

donde el superíndice «exp» hace referencia a datos experimentales y el superíndice «mod» a datos sintéticos. Al escribir las dos ecuaciones anteriores hemos supuesto que el material se comporta de forma elástica durante el ciclo de descarga; esto implica que la parte inicial de la curva esfuerzo-deformación experimental (la región basal) no se reproduce en este modelo. También está implícito en este algoritmo que el módulo elástico calculado es el módulo de Young *secante*.

#### Datos de conductividad eléctrica

La conductividad eléctrica se ha utilizado desde hace años para proporcionar información sobre la porosidad y la saturación fraccional de poros y grietas en rocas, sobre todo en la industria petrolera, donde conocer la proporción relativa de petróleo (no conductor) y agua (eléctricamente conductora) es muy importante como una primera estimación de las reservas de un yacimiento. Tal vez la forma más

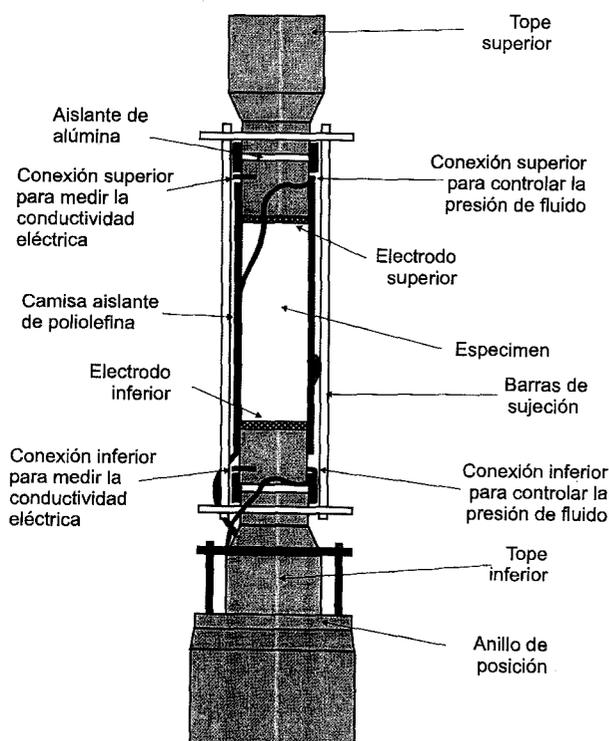


Fig. 7.—Esquema del dispositivo experimental para medir la conductividad eléctrica durante la deformación triaxial de las muestras de arenisca Darley Dale.

simple de estimar la porosidad a partir de la conductividad eléctrica sea por medio de la ley de Archie (1942),

$$\frac{\Sigma_r}{\Sigma_f} = \phi^m, \quad (41)$$

donde  $\Sigma_r$  es la conductividad eléctrica de la roca saturada,  $\Sigma_f$  la conductividad eléctrica del fluido intergranular,  $\phi$  la porosidad y  $m$  un índice, denominado exponente de Archie, con un valor cercano a 2 para muchas rocas porosas. A la porosidad derivada de la ley de Archie la denominaremos *porosidad eléctrica* ( $\phi$ ) para diferenciarla de la porosidad volumétrica ( $\Phi$ ), calculada experimentalmente a partir del volumen de fluido intergranular durante un experimento de deformación (Glover *et al.*, 2000).

La conductividad eléctrica compleja de una roca saturada cambia con la frecuencia debido a los distintos tiempos de relajación que tiene cada uno de los procesos de redistribución de carga que contribuyen a su polarización dieléctrica (Guéguen y Palciauskas, 1994, y Glover *et al.*, 1994b). Cada valor de la frecuencia sirve para estudiar un proceso y una escala particulares dentro de una roca saturada. Estas medidas fueron tomadas durante una serie de

Tabla 2.—Propiedades de la arenisca Darley Dale.

Propiedad	
Mineralogía <sup>1</sup> :	75 % cuarzo 15 % feldespato 10 % moscovita e illita
Textura <sup>1</sup> :	granular, bien cementada, mala selección (tamaño de grano 0,08-0,8 mm)
Porosidad:	alta, variable (12-28 %)
Permeabilidad <sup>2</sup> :	700 mD-2000 mD
Resistencia:	tensión: 5 MPa compresión uniaxial: 47 MPa compresión biaxial: 150 MPa @ $P_c = 25$ MPa 200 MPa @ $P_c = 50$ MPa
Propiedades elásticas:	Módulo volumétrico de la matriz <sup>3</sup> : $K_0 = 42$ GPa Coeficiente de Poisson de la matriz <sup>3</sup> : $\nu_0 = 0,13$ Módulo de Young de la matriz <sup>4</sup> : $E_0 = 93$ GPa

<sup>1</sup> Ismail y Murrell (1976).

<sup>2</sup> Glover *et al.* (1994a).

<sup>3</sup> De la mineralogía. Promedio de Hill (1952) de los límites de Voigt (1928) y Reuss (1929). Los valores de las constantes elásticas de los minerales se han tomado de Simmons and Wang (1971).

<sup>4</sup> De la relación estándar  $E_0 = 3K_0(1 - 2\nu_0)$ .

experimentos de deformación triaxial realizados en el Rock and Ice Physics Laboratory del University College London (Gran Bretaña), con una celda de deformación triaxial de 1.5 MN capaz de ejercer presiones confinantes de hasta 400 MPa (fig. 7). En dichos experimentos se midió la conductividad en función de la frecuencia en el rango 20 – 10<sup>6</sup> Hz en muestras cilíndricas de 40 mm de diámetro y 110 mm de longitud inicialmente saturadas con agua destilada.

Todos los experimentos se realizaron sobre muestras de arenisca Darley Dale de una cantera del norte de Inglaterra (Ismail y Murrell, 1976). Petrográficamente, se trata de una subarcosa con un 75 % de cuarzo, 15 % de feldespato (microclina > plagioclasa > ortosa) y 10 % de biotita. La roca tiene también algo de matriz diagenética por alteración de los feldespatos. El tamaño de grano oscila entre 0,1 y 0,8 mm y la porosidad está en torno al 20 % (tabla 2).

Como se observa en la figura 7, la muestra, rodeada de una camisa de poliolefina que se encoge con el calor, se coloca entre los dos electrodos en la columna central de la celda. Dicha columna, que está aislada eléctricamente del resto del aparato, se introduce en el cilindro de presión de 400 MPa. El sistema está diseñado para poder fijar el conjunto formado por la muestra (y la camisa), los electrodos

Tabla 3.—Resumen de los experimentos realizados.

Sigla	Tipo	$P_p$	$P_c$ (MPa)	Rock	$\phi_i$ (%) <sup>1</sup>	$\phi_0$ (%) <sup>2</sup>
TRY1	Triaxial, no drenado	variable	50	DDS	28,0	24,4
TRY2	Triaxial, no drenado	variable	25	DDS	23,4	21,1
TRY3	Hidrostático, drenado	atmosférica	0-250	DDS	17,6	15,9
TRY4	Triaxial, drenado	atmosférica	50	DDS	15,9	14,4

<sup>1</sup> Porosidad antes de aplicar la presión confinante.

<sup>2</sup> Porosidad después de aplicar la presión confinante.

y las pastillas al tope inferior de la celda de presión y luego deslizar el resto sobre ella por medio de gatos hidráulicos. Un giro de 60° permite sellar el conjunto. Luego, se sitúa sobre el tope superior la cabeza de la prensa y el aparato está listo para ser operado por servocontrol por medio de un sistema de *feedback* analógico de alta precisión. Primero se incrementa en varias etapas la presión confinante hasta la presión final de trabajo (25 MPa para unos experimentos y 50 MPa para otros). Durante esta fase se mide la conductividad eléctrica compleja desde 20 Hz hasta 1 MHz. Luego se comienza la deformación triaxial a velocidad constante e igual a  $1,66 \times 10^{-6} s^{-1}$  hasta la ruptura macroscópica de la muestra. Durante esta segunda etapa también se mide continuamente la conductividad eléctrica compleja en todo el rango de frecuencias. Una descripción más pormenorizadas de dichos experimentos se puede encontrar en (Glover *et al.*, 2000).

De este conjunto de datos se han elegido las medidas de conductividad eléctrica a 1 kHz para realizar la reconstrucción de las curvas esfuerzo-deformación, ya que a esta frecuencia los cambios en la conductividad eléctrica son sensibles sólo a los cambios en la estructura del espacio poroso y a las características del fluido intergranular, pero no a los procesos de conducción superficial (Glover *et al.*, 1994a). Los experimentos realizados proporcionan la conductividad eléctrica en función de la deformación axial de la muestra. Conociendo o estimando el exponente de Archie  $m$  se puede calcular el cambio asociado en el volumen de poros y grietas y usar esta información para definir un parámetro de densidad de grietas. Si tomamos logaritmos en la ecuación (41) obtenemos:

$$\phi(\epsilon_a) = \exp\left[\frac{\ln \Sigma_r(\epsilon_a) - \ln \Sigma_f(\epsilon_a)}{m(\epsilon_a)}\right], \quad (42)$$

donde hemos escrito explícitamente la dependencia de todas las variables en la deformación axial.

La conductividad eléctrica a 1 kHz se midió en tres muestras durante su deformación triaxial hasta

la ruptura y en otra muestra de la misma roca deformada por compresión hidrostática hasta 250 MPa. La tabla 3 lista las características de los experimentos realizados, junto con la porosidad inicial de cada una de las cuatro muestras (Glover *et al.*, 2000).

Se realizaron dos tipos de experimentos: drenados y no drenados. En los experimentos *no drenados* el volumen de fluido intersticial se mantiene constante y la presión de fluidos cambia. Sin embargo, no se pudo medir ésta porque interfería con las medidas de conductividad. En los experimentos *drenados* la presión de fluidos se mantiene constante y al fluido se le permite entrar y salir de la muestra a través de unos conductos eléctricamente aislados. Estos conductos están conectados a un matraz situado sobre una balanza de precisión que permite calcular gravimétricamente el volumen de fluido en la muestra.

Para los experimentos no drenados a 25 MPa (TRY2) y 50 MPa (TRY1) de presión confinante no se midió el exponente de Archie y se asumió que era constante e igual a 2 durante toda la deformación. El valor  $m = 2$  se usa porque es el más apropiado para areniscas permeables de alta porosidad, con poros equidimensionales como la arenisca Darley Dale. Sin embargo, es importante dejar claro que el supuesto de que el exponente de Archie es constante durante la deformación no tiene por qué ser válido (ya que se sabe que éste depende de la geometría de los poros y las grietas) y hay que comprobarlo *a posteriori*. Como las grietas en una roca cambian su esfericidad con la deformación y el exponente de Archie depende de la esfericidad de las grietas, es de esperar que éste cambie con la deformación. Sin embargo, debido a la alta porosidad de las muestras estudiadas y a que la mayor parte de esta porosidad es debida a poros equidimensionales, que cambian poco su geometría con la deformación, es lícito asumir que las variaciones en el exponente de Archie van a ser pequeñas en las muestras utilizadas, ya que su valor va a estar dominado por la porosidad de cavidades equidimensionales, insensibles en gran medida a los cambios de volumen por deformación.

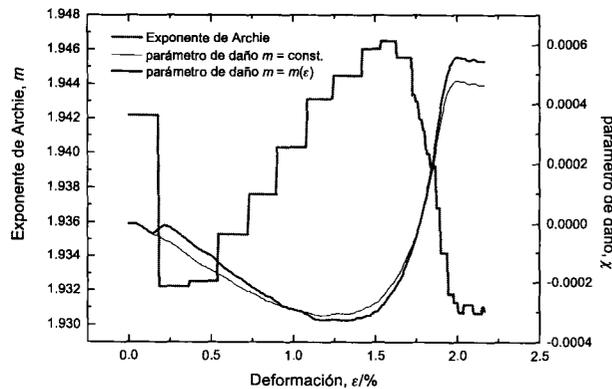


Fig. 8.—Evolución del exponente de Archie (línea gris) al aumentar la deformación axial en el experimento drenado TRY4 a 50 MPa de presión confinante. En el mismo gráfico se muestra el parámetro de daño calculado con la curva  $m(\epsilon_d)$  (línea gruesa) y asumiendo  $m = \text{const.}$  (línea fina).

Para examinar en detalle el comportamiento del exponente de Archie se realizó un experimento triaxial en condiciones drenadas (TRY4) que ha proporcionado valores de  $m$  en función de la deformación axial de la muestra (fig. 8). Para esta muestra en particular hemos podido comparar el parámetro de daño calculado con el valor real del exponente de Archie y el calculado con el valor constante  $m = 2$ . Ambas curvas se muestran en la figura 8. Como se esperaba, el valor de  $m$  cambia muy poco durante la deformación lo que hace que el parámetro de daño sea muy similar en los dos casos.

El resultado de aplicar la ecuación (42) a los datos de conductividad eléctrica a 1 kHz se muestra en la figura 9, que es un gráfico de la evolución de la porosidad eléctrica en función de la deformación (gráficos de la izquierda) y del esfuerzo (gráficos de la derecha) para las muestras TRY1, TRY2 y TRY4. TRY1 es un experimento no drenado a una presión confinante de 50 MPa, TRY2 es otro experimento no drenado, pero a una presión confinante menor, de 25 MPa, mientras que TRY4 un experimento drenado a 50 MPa de presión confinante. Nótese que la porosidad inicial de las muestras TRY1 y TRY2 es mayor que la de la muestra TRY4. En los gráficos sólo se muestra el cambio de porosidad total durante la deformación axial (aumento del esfuerzo axial, manteniendo constante la presión confinante). Previamente, las muestras fueron sometidas a un aumento paulatino de la presión confinante desde 0 hasta la presión final de trabajo (25 MPa para TRY2 y 50 MPa para TRY1 y TRY4), lo que redujo la porosidad de las muestras desde su valor original (denominado  $\phi_i$  en la tabla 3) hasta el valor que se muestra para  $\epsilon = 0$  en las gráficas (denominado  $\phi_0$  en la tabla 3). Esto

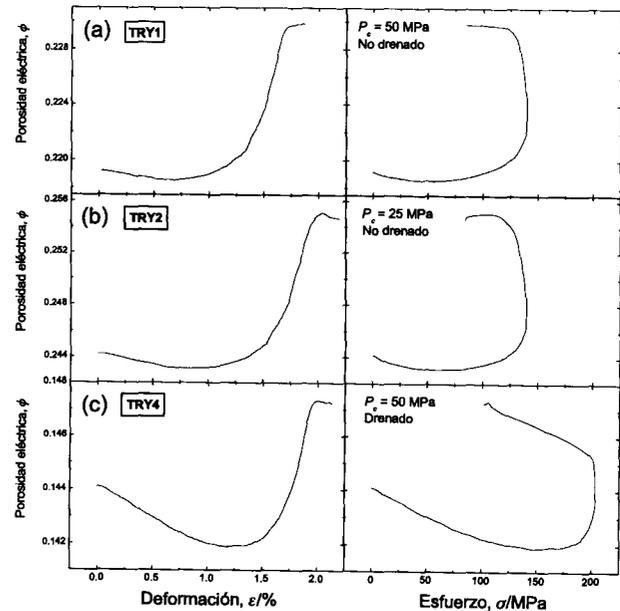


Fig. 9.—Porosidad eléctrica total en función de la deformación axial (gráficos de la izquierda) y del esfuerzo axial (gráficos de la derecha) para los experimentos TRY1 (a) TRY2 (b) Y TRY4 (c).

supone una pérdida inicial de porosidad conforme las grietas se cierran durante esta etapa hidrostática, de  $\phi_i$  a  $\phi_0$ .

Las curvas muestran un patrón común durante la etapa desviatoria: al principio, las grietas perpendiculares al eje de deformación tienden a cerrarse, tal y como se ha discutido más arriba. El comienzo de la formación de grietas nuevas hace que se genere nuevo volumen de grietas. Estas grietas nuevas tienen su eje mayor subparalelo al eje de la muestra (grietas axiales). Las grietas axiales son las más importantes desde el punto de vista de la conductividad eléctrica ya que son las que mayor potencial tienen de modificar el flujo del fluido intergranular, reduciendo dramáticamente la tortuosidad de las líneas de corriente dentro de la muestra. Las grietas axiales también son claves en las propiedades mecánicas de la roca cuando ésta se deforma uniaxialmente. Estamos, por tanto, ante un parámetro de daño que es más sensible a la fracturación en la dirección de mayor importancia mecánica. La pérdida de volumen de grietas y poros por compactación pronto se ve compensada por el crecimiento de nuevas grietas. El volumen de poros y grietas continúa aumentando hasta que la muestra se fractura macroscópicamente. A partir de este momento, la porosidad se mantiene constante.

La porosidad derivada de los datos de conductividad eléctrica a través de la ley de Archie es la porosidad total conectada eléctricamente,  $\phi$  (es decir, la

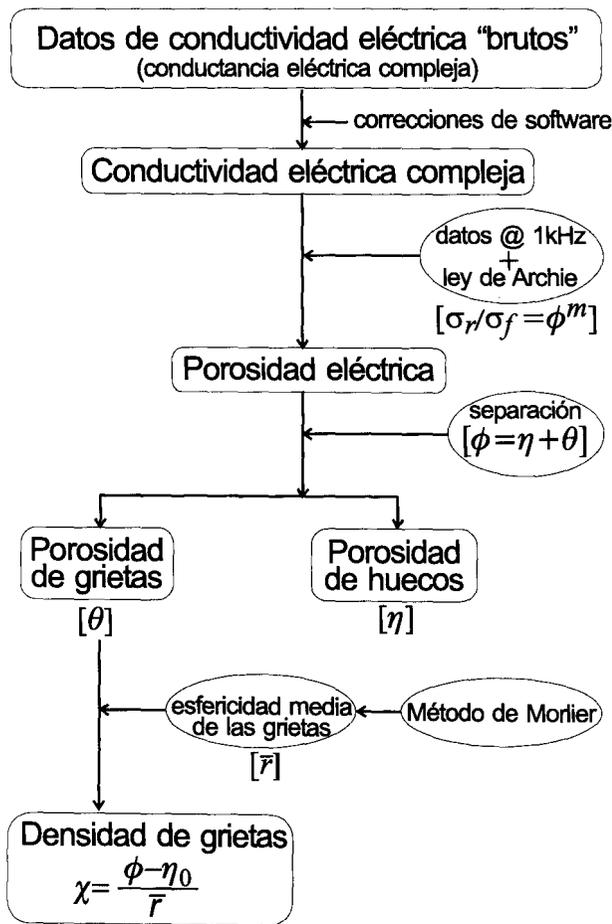


Fig. 10.—Diagrama de flujo de los pasos principales en los que se puede dividir el proceso de conversión de los datos de conductividad eléctrica en un parámetro de daño.

porosidad relacionada directamente con la circulación del fluido intergranular, pero no corregida por cambios de la tortuosidad), que es la suma de la porosidad debida a cavidades equidimensionales (la porosidad de huecos,  $\eta$ ) y la porosidad debida a la presencia de grietas (porosidad de grietas,  $\theta$ ). Como ambas son función de la deformación, podemos escribir

$$\phi(\varepsilon) = \eta + \theta(\varepsilon). \tag{43}$$

*Derivación del parámetro de daño*

Para formular un parámetro de daño a partir de los datos experimentales, lo primero que debemos hacer es separar la contribución de los poros y las grietas a la porosidad total. Los siguientes cuatro pasos son necesarios para llevar a cabo esta separación: 1) calcular la porosidad de huecos inicial,  $\eta_0$ ,

Tabla 4.—Porosidades iniciales de poros y grietas para las cuatro muestras.

Muestra	$\eta_0$ (%)	$\theta_0$ (%)
TRY1	25,0	3,0
TRY2	20,9	2,5
TRY3	15,7	1,9
TRY4	14,2	1,7

y la porosidad de grietas inicial,  $\theta_0$ ; 2) evaluar el cambio en la porosidad de huecos con respecto al esfuerzo axial,  $\eta(\varepsilon_a) = \eta_0 + \partial\eta/\partial\varepsilon_a$ ; 3) restar de la curva de porosidad total la función calculada en el paso anterior  $\theta(\varepsilon_a) = \phi(\varepsilon_a) - \eta(\varepsilon_a)$  (la curva resultante muestra sólo las variaciones en la porosidad debidas a la apertura, el cierre y la formación de grietas), y 4) dividir la curva resultante por la esfericidad media de las grietas,  $\bar{r}$ , para obtener el parámetro de daño buscado,  $\chi(\varepsilon_a) = \theta(\varepsilon_a)/\bar{r}$ . La figura 10 muestra los pasos anteriores en forma de diagrama de flujo. Veamos cómo calcular cada una de estas contribuciones.

**Porosidad inicial de huecos y porosidad inicial de grietas**

Las porosidades iniciales de huecos  $\eta_0$  y grietas  $\theta_0$  pueden estimarse a partir de un ajuste exponencial de la curva experimental que representa la variación del volumen de poros frente a la presión confinante en el experimento de deformación hidrostática TRY3. La figura 11 muestra los datos experimentales (puntos) y la interpolación mediante la función

$$\Phi = \eta_0 + (\phi_0 - \eta_0)e^{-P_c/\hat{P}}, \tag{44}$$

donde  $\Phi$  es la porosidad volumétrica,  $P_c$  es la presión confinante y  $\hat{P}$  un factor de escala con dimensiones de presión que determina el ritmo al que la porosidad total disminuye. De la ecuación (44) se calculan  $\eta_0$  y  $\theta_0 = \phi_0 - \eta_0$ , ya que  $\phi_0$  es conocido (ver tabla 3). Para las muestras TRY1, TRY2 y TRY4 no se cuenta con una curva porosidad-presión similar (ya que no se trata de experimentos hidrostáticos sino desviatorios), por lo que se ha asumido que la relación  $\eta_0/\theta_0$  es la misma que para la muestra TRY3, al tratarse del mismo tipo de roca. También se ha tenido en cuenta el hecho conocido (Ayling *et al.*, 1965) de que sólo el 50 % de la deformación de la arenisca de Darley Dale es debida al cierre de grietas, mientras que el otro 50 % se debe al colapso de los poros y a la compactación de la matriz. La tabla 4 recopila los valores calculados de  $\eta_0$  y  $\theta_0$  para las cuatro muestras.

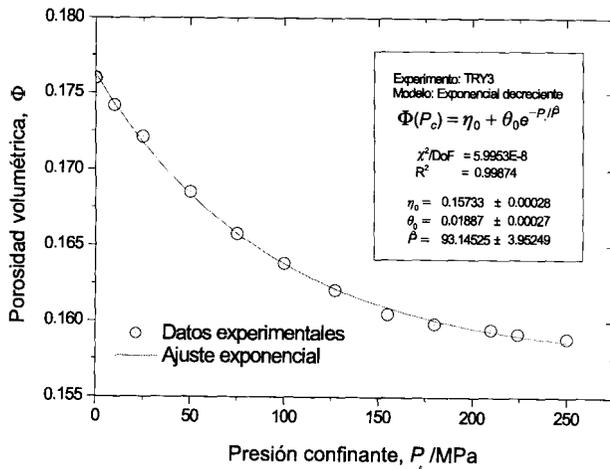


Fig. 11.—Curva de la variación de la porosidad volumétrica frente a la presión confinante para el experimento de compresión hidrostática TRY3. Para la estimación de los parámetros  $\eta_0$  (porosidad de huecos inicial) y  $\theta_0$  (porosidad de grietas inicial) se ha utilizado un ajuste exponencial de la forma  $\Phi(P_c) = \eta_0 + \theta_0 e^{-P_c/\hat{\beta}}$ , donde  $\hat{\beta}$  es un factor de escala con unidades de presión. Los valores estimados de  $\eta_0$  y  $\theta_0$  se recogen en la tabla 4 junto con los de las muestras TRY1, TRY2 y TRY4.

### Ritmo de cierre de los poros

Podemos obtener un valor aproximado para el ritmo de cierre de las cavidades equidimensionales a presiones confinantes bajas (bajas comparadas con el módulo de Young de la matriz) a partir del análisis del cambio de volumen de poros esféricos no interactuantes en un sólido deformado en condiciones hidrostáticas drenadas. Los detalles se dan en el Apéndice B. De las expresiones (B9) y (B10) y usando los valores  $K_0 = 42$  GPa para el módulo volumétrico de la matriz,  $\nu_0 = 0,13$  para el coeficiente de Poisson de la matriz y  $\eta_0 = 15,7\%$  para la porosidad inicial de poros (valores que corresponden a la muestra TRY3), obtenemos un cambio en el volumen de poros de  $0,16\%$  entre 0 y 250 MPa. Este valor es mucho menor que el correspondiente cambio en la porosidad de grietas en el mismo rango de presiones en el experimento TRY3 ( $\sim 2\%$ ), por lo que en una primera aproximación puede despreciarse su contribución y considerar que todo el cambio en la porosidad total se debe a la apertura y cierre de grietas. Es decir, vamos a asumir que  $\partial\eta/\partial\varepsilon_a = 0$  y, por tanto,  $\eta(\varepsilon_a) = \eta_0 = \text{const}$ . En los experimentos TRY1 y TRY2, realizados en condiciones no drenadas, esta aproximación es todavía más válida ya que el fluido intergranular se comporta en este caso de forma prácticamente incompresible, disminuyendo aún más el ritmo de cierre de las cavidades equidimensionales.

### Cálculo de la curva $\theta(\varepsilon_a)$

Como vamos a ignorar la pequeña contribución de las cavidades equidimensionales al cambio de porosidad, el proceso de sustraer la variación de la porosidad de huecos de la curva de variación de la porosidad volumétrica total se reduce a restar la constante  $\eta_0$  de los valores experimentales de  $\Phi$  frente a la presión. Pero, así como el ritmo de variación de la porosidad de huecos se puede ignorar, no se puede ignorar la influencia que éstos tienen en el campo de esfuerzo interno y, por tanto, en la evolución de la porosidad de grietas. Esto es así porque las cavidades equidimensionales *aumentan* el esfuerzo medio dentro de la muestra con respecto al esfuerzo remoto aplicado (Kachanov, 1992). Por tanto, las grietas no van a «sentir» el esfuerzo remoto  $\sigma$ , sino un esfuerzo efectivo  $\sigma_{ef}$  mayor, dado por (Kachanov, 1992):

$$\sigma_{ef} = \frac{\sigma}{1 - \eta_0}. \quad (45)$$

Como estamos considerando que la porosidad de hueco no cambia durante la deformación, la ecuación (45) actúa como un factor corrector constante al campo de esfuerzos aplicado.

### Estimación de la esfericidad de las grietas

Para finalizar la derivación del parámetro de densidad de grietas a partir de los datos experimentales de conductividad eléctrica, necesitamos estimar la esfericidad media de las grietas. Para ello hacemos uso nuevamente del experimento hidrostático TRY3. Al ser un experimento en condiciones drenadas, se obtuvo una curva de compresibilidad a partir del análisis gravimétrico del fluido drenado de la muestra al aumentar al presión (fig. 11). Combinando esta información experimental con el método de Morlier (1971) es posible calcular el espectro de esfericidades de las grietas de la muestra.

Morlier (1971) desarrolló un método para calcular la distribución de esfericidades de las grietas en una roca a partir de la segunda derivada de la curva porosidad-presión confinante. El método usa la aproximación no interactuante para el módulo volumétrico efectivo y proporciona una primera aproximación para el espectro de esfericidades. El método de Morlier se basa en la propiedad de que la presión de cierre de las cavidades de un sólido depende de la esfericidad inicial de las cavidades. Si denotamos por  $\Phi(P_c)$  la fracción volumétrica de cavidades que permanecen abiertas a la presión  $P_c$ , podemos escribir la distribución de esfericidades  $h'(r)$  como (Zimmerman, 1991)

$$h'(-P_c C^{-1}) = C P_c \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P_c^2}, \quad (46)$$

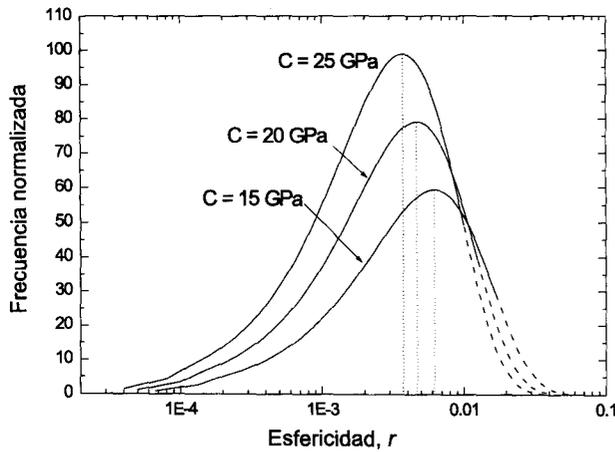


Fig. 12.—Espectro de esfericidades de las grietas de la muestra TRY3 calculado mediante el método de Morlier haciendo uso de la curva de compresibilidad de la figura 11. Las tres curvas corresponden a tres valores distintos de la constante  $C$ , que se define en el texto. La parte de puntos de cada curva es la extrapolación realizada para presiones mayores de 250 MPa, la presión confinante máxima del experimento TRY3, a la cual todavía no estaban cerradas todas las grietas. El rango de valores de la esfericidad media que se deduce de las curvas de la figura es  $0,0037 \leq \bar{r} \leq 0,0062$ , con un valor más probable de  $r = 0,005$ .

donde el argumento de la función  $(-P_c C^{-1})$ , es la esfericidad inicial de las grietas que se cierran a la presión  $P_c$  y  $C^{-1}$  es una constante que sólo depende del tipo de cavidades consideradas y que para el caso de grietas tridimensionales en moneda vale  $C^{-1} = 16(1 - \nu_0^2(10 - 3\nu_0)/45K_0(2 - \nu_0)(1 - 2\nu_0)$ .  $\Phi$  es la porosidad volumétrica, escrita de esta forma para diferenciarla de la porosidad eléctrica  $\phi$ . Sin embargo  $h'(r)$  no es una verdadera densidad de probabilidad ya que no está normalizada. De hecho,  $\int_0^{r_M} h'(r) dr = \phi_0$  (donde  $r_M$  es un valor máximo para la esfericidad; es decir, no existen grietas con una esfericidad  $r > r_M$ ), por lo que debemos dividir  $h'(r)$  para  $\phi_0$  para obtener una verdadera densidad de probabilidad:

$$h(r) = \frac{h'(r)}{\int_0^{r_M} h'(r) dr} \quad (47)$$

La figura 12 muestra el espectro de esfericidades para la muestra TRY3 calculado a partir de la ecuación (47) y de la curva porosidad-presión experimental. Para calcular la segunda derivada de dicha curva, primero se interpoló una función cúbica por la curva experimental y la diferenciación numérica se hizo a partir de dicho ajuste cúbico. Si en lugar de un ajuste cúbico se utiliza un ajuste exponencial, la distribución de esfericidades tiene una cola más larga para esfericidades grandes, pero las caracterís-

ticas básicas del espectro no cambian. Para representar las curvas de la figura 12 hemos usado tres valores distintos para la constante  $C$ , 15, 20 y 25 GPa, debido a la incertidumbre en los valores de  $K_0$  y  $\nu_0$  cuando se calculan por diferentes métodos. El valor central  $C = 20$  GPa es el más probable. Como la máxima presión confinante aplicada no fue suficiente para cerrar todas las grietas, se hace necesario extrapolar la distribución de esfericidades  $h(r)$  para estimar  $r_M$ . Esta extrapolación se muestra en la figura 12 como líneas de trazos. La esfericidad media  $\bar{r}$  es

$$\bar{r} = \int_0^{r_M} r h(r) dr. \quad (48)$$

Aplicando esta ecuación se obtiene un valor de  $\bar{r}$  en el rango  $3,8 \times 10^{-3} \leq \bar{r} \leq 6,2 \times 10^{-3}$ , con un valor más probable de  $\bar{r} = 5 \times 10^{-3}$ . Este valor será el que usemos para convertir los datos de porosidad en datos de densidad de grietas cuando utilicemos el método para reconstruir las curvas de esfuerzo-deformación haciendo uso de los valores experimentales para los parámetros del modelo.

## Resultados

De la discusión en la sección anterior, podemos escribir el parámetro de densidad de grietas  $\chi$  en la forma

$$\chi(\varepsilon_a) = \frac{\phi(\varepsilon_a) - \eta_0}{\bar{r}}, \quad (49)$$

donde  $\phi(\varepsilon_a)$  es la porosidad eléctrica medida durante los experimentos (ecuación 42),  $\eta_0$  es la porosidad de huecos inicial (tabla 4) y  $\bar{r}$  la esfericidad media (ecuación 48).

La ecuación (49) es, por tanto, nuestro parámetro de daño derivado experimentalmente, que lo usaremos como entrada en las ecuaciones recopiladas en la tabla 1 para calcular el módulo de Young efectivo de las tres muestras de arenisca Darley Dale y, a partir de él, obtener las curvas esfuerzo-deformación sintéticas que compararemos con sus homónimas experimentales usando las ecuaciones (39) y (40).

Insertando la ecuación (49) en las ecuaciones de la tabla 1 y recordando que, para un material isotrópico,  $\sigma_a = E\varepsilon_a$ , el esfuerzo axial predicho  $\sigma_m$ , sobre una muestra sometida a una deformación axial  $\varepsilon_a$ , para los tres modelos de sólidos fracturados se pueden escribir de la siguiente forma:

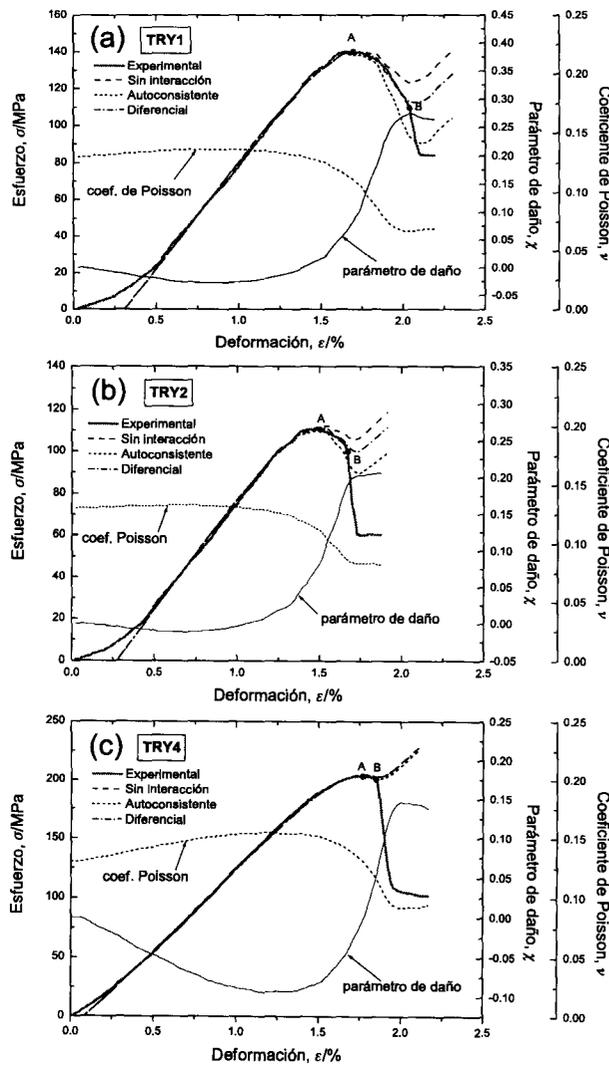


Fig. 13.—Resultado de la reconstrucción de la curva esfuerzo-deformación para los experimentos TRY1 (a), TRY2 (b) y TRY4 (c). En cada gráfico se muestran las curvas esfuerzo-deformación sintéticas para los tres modelos distintos de sólido fracturado (modelos sin interacción, autoconsistente y diferencial), la curva esfuerzo deformación experimental (trazo gris grueso) y el parámetro de daño. Como la resolución del modelo autoconsistente requiere del cálculo del coeficiente de Poisson efectivo  $\nu$ , éste también se ha añadido en el gráfico. Los puntos marcados sobre las curvas esfuerzo-deformación experimentales corresponden al esfuerzo máximo (A) y al punto de ruptura macroscópica de la muestra (B). Nótese que la escala de deformaciones y la del módulo de Poisson efectivo son las mismas en los tres gráficos pero no así la de esfuerzos y la del parámetro de daño.

$$\sigma_m = \frac{E_0 \varepsilon_a}{1 + g_1(\nu_0) \left[ \frac{\phi(\varepsilon_a) - \eta_0}{\bar{r}} \right]} \quad (\text{sin interacción}), \quad (50)$$

$$\sigma_m = E_0 \varepsilon_a \left[ 1 - g_2(\nu) \left( \frac{\phi(\varepsilon_a) - \eta_0}{\bar{r}} \right) \right]$$

$$\nu = g_3(\nu_0) \left( \frac{\phi(\varepsilon_a) - \eta_0}{\bar{r}} \right) \quad (\text{autoconsistente}), \quad (51)$$

y

$$\sigma_m = E_0 \varepsilon_a \exp \left\{ -k \left[ \frac{\phi(\varepsilon_a) - \eta_0}{\bar{r}'} \right] \right\} \quad (\text{diferencial}). \quad (52)$$

En estas ecuaciones  $E_0$  es el módulo de Young del sólido sin grietas (pero con poros) y  $g_1(\nu_0)$ ,  $g_2(\nu_0)$  y  $g_3(\nu_0)$  tres constantes materiales. Las ecuaciones (50)–(52) pueden escribirse en la forma general

$$\sigma_m = f(\varepsilon_a, E_0, \nu_0, \chi), \quad \text{con } \chi = f(\eta_0, \bar{r}, \phi). \quad (53)$$

En la ecuación (53),  $\varepsilon_a$ , la deformación axial y  $\phi(\varepsilon_a)$ , la porosidad eléctrica en función de la deformación axial, son *datos experimentales* mientras que  $E_0$ ,  $\nu_0$ ,  $\eta_0$ , y  $\bar{r}$  son *parámetros del modelo*, que pueden estimarse por el propio procedimiento de inversión (ajuste no lineal a la curva experimental de esfuerzo-deformación) o calcularse por métodos independientes (como hemos hecho utilizando el experimento hidrostático TRY3) para reconstruir las curvas de esfuerzo-deformación directamente.

Hemos realizado un ajuste no lineal de las ecuaciones (50)–(52) a las curvas experimentales de esfuerzo-deformación para obtener un conjunto de valores estimados de los parámetros del modelo. La estrategia de inversión ha sido aplicada a las tres muestras TRY1, TRY2 y TRY4, deformadas a diferentes presiones confinantes y en condiciones tanto drenadas como no drenadas. Los resultados de la reconstrucción de las curvas esfuerzo-deformación se muestran en la figura 13. La figura 13(a) corresponde a los resultados para la muestra deformada a 50 MPa de presión confinante en condiciones no drenadas (TRY1), la figura 13(b) es para la muestra deformada a 25 MPa en condiciones no drenadas (TRY2) y la figura 13(c) para la muestra deformada a 50 MPa de presión confinante en condiciones drenadas (TRY4). En esta última muestra, al tratarse de un experimento drenado, se pudo calcular el exponente de Archie en función de la deformación axial. Precisamente la figura 13(c) muestra los resultados de la inversión con el valor real  $m(\varepsilon_a)$  que aparece

en la figura 8. En los tres gráficos se muestra el parámetro de daño, las curvas esfuerzo-deformación reconstruidas con los métodos no interactuante, autoconsistente y diferencial, y la curva esfuerzo-deformación experimental.

La figura pone de manifiesto que el procedimiento de inversión funciona muy bien hasta el momento de la fractura macroscópica de las muestras (punto marcado con una B en las figuras). El procedimiento es capaz de reproducir tanto la región de endurecimiento por esfuerzo situada entre el final de la región recta de la curva y el esfuerzo máximo (marcado con una A en las figuras), como la región de debilitamiento por esfuerzo que hay entre el esfuerzo máximo y la ruptura macroscópica. En este sentido, el método es capaz de reproducir las características de las curvas de esfuerzo-deformación con más exactitud que con el método basado en la emisión acústica. Sammonds *et al.* (1994) han realizado experimentos de deformación triaxial en muestras de arenisca Darley Dale (extraídas del mismo bloque que las que se han usado en este estudio) y calculado un parámetro de daño basado en los datos experimentales de emisión acústica para reconstruir las curvas de esfuerzo-deformación. Los resultados obtenidos aquí por medio del parámetro de daño direccional derivado de los datos de conductividad eléctrica son superiores a los obtenidos por medio del parámetro de daño derivado de los datos de emisión acústica para todos los modelos de sólidos fracturados utilizados, para todas las presiones confinantes y en condiciones drenadas y no drenadas.

Es importante resaltar que para los experimentos no drenados TRY1 y TRY2 los puntos de esfuerzo máximo y de ruptura macroscópica están muy separados, mientras que en el experimento drenado TRY4 ambos puntos son prácticamente coincidentes. Esto es una consecuencia del aumento de rigidez global que provoca el fluido intergranular presurizado en los experimentos no drenados. El procedimiento de inversión es capaz de reproducir ambos comportamientos. No está de más repetir, como ya se ha comentado más arriba, que la inversión no es capaz de reproducir la parte basal de las curvas de esfuerzo-deformación, que es el resultado de un colapso irreversible del almacén de granos de la roca.

## Discusión y valoración

### *Análisis de sensibilidad del método de reconstrucción*

¿Cómo podemos comprobar la bondad de las curvas reconstruidas de una forma más cuantitativa que por mera inspección visual? La respuesta es reali-

zando un *análisis de sensibilidad*. Esto conlleva modificar los valores de los parámetros, uno por uno y en una cantidad prefijada, y ver cómo se ven afectadas las curvas sintéticas resultantes. Si no se produce ningún cambio en la curva de esfuerzo deformación, quiere decir que el método no es sensible a ese parámetro en particular. Por otro lado, si se produce una gran variación en la curva de esfuerzo-deformación como resultado de un pequeño cambio en uno de sus parámetros, implica que el método es muy sensible a ese parámetro. Hablando estrictamente, sólo los parámetros que muestren una alta sensibilidad se puede decir que están «resueltos» por el modelo y los únicos que pueden ser llamados realmente parámetros.

Para comprobar esto se ha realizado un análisis de sensibilidad para los cuatro parámetros del modelo: el módulo de Young del sólido sin grietas  $E_0$ , el coeficiente de Poisson del sólido sin grietas  $\nu_0$ , la porosidad de grietas inicial  $\theta_0$  y la esfericidad media de las grietas  $\bar{r}$ . La figura 14 muestra los resultados de este análisis de sensibilidad para la muestra TRY1 y el modelo autoconsistente. La porosidad de grietas inicial (fig. 14a) se ha variado en un factor 2 alrededor del mejor valor estimado del parámetro ( $\theta = 0,2$  %). La esfericidad media de las grietas (fig. 14b) se ha variado en un factor 2 (de 0,02 a 0,005, con un mejor valor estimado de 0,01). El coeficiente de Poisson del sólido sin grietas (fig. 14c) se ha cambiado en un factor 2 (0,1 a 0,3, alrededor del valor estimado 0,15). Finalmente, el módulo de Young del sólido sin grietas (fig. 14d) se ha cambiado en  $\pm 10$  % alrededor de su mejor valor estimado de 11,3 GPa.

De la observación de la figura 14 se puede concluir inmediatamente que el coeficiente de Poisson del sólido sin grietas no muestra sensibilidad a los cambios y, por tanto, no es un parámetro resuelto por el modelo. Este resultado no debe sorprender y podría haber sido predicho de antemano, ya que estamos midiendo cantidades axiales, mientras que el coeficiente de Poisson también depende de las propiedades mecánicas radiales. Por lo que respecta al resto de los parámetros, vemos que todos ellos están bien resueltos por el modelo, mostrando una alta sensibilidad a los cambios en sus valores estimados.

### *Comparación de los parámetros estimados con los parámetros calculados independientemente*

El siguiente paso en la comprobación de la bondad del procedimiento de inversión consiste en comparar los valores estimados de los parámetros con los valores calculados independientemente para

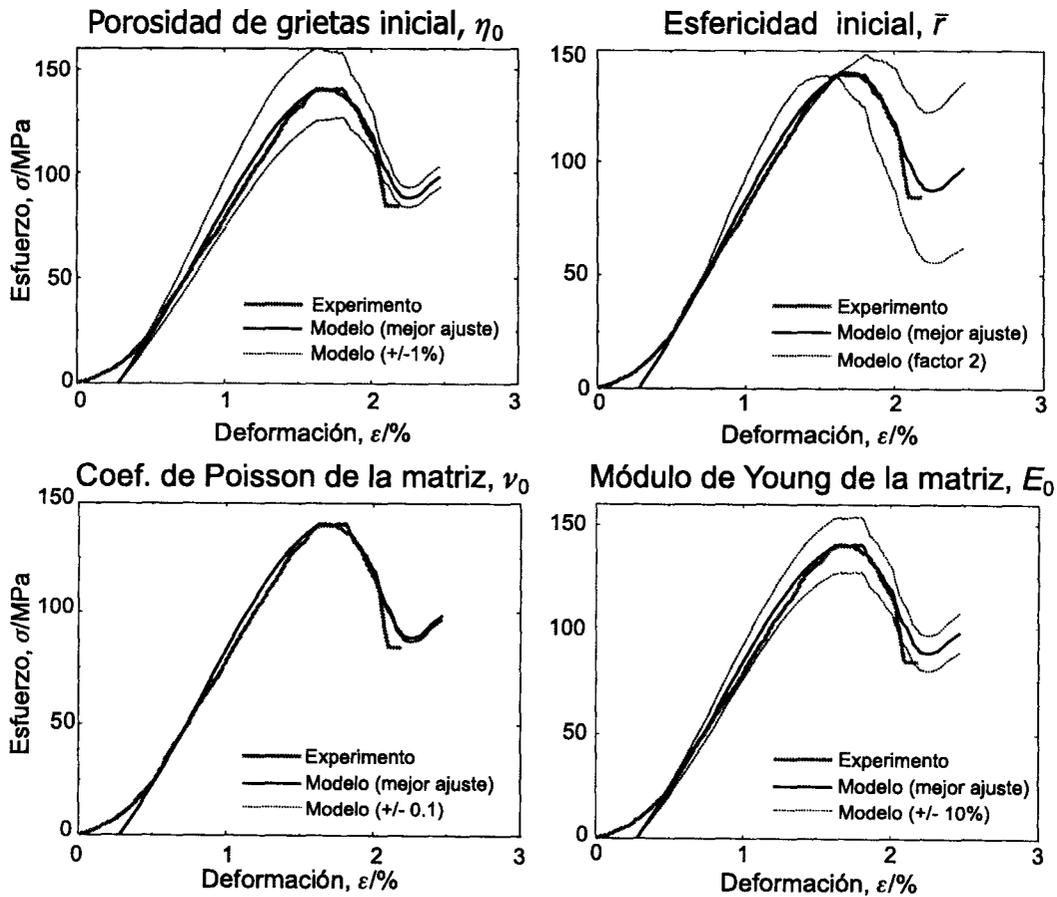


Fig. 14.—Análisis de sensibilidad para el experimento TRY1 usando, a modo de ejemplo, la aproximación autoconsistente. En todos los gráficos la línea continua gruesa es la curva esfuerzo-deformación experimental, la línea continua fina la curva sintética para el conjunto de valores de los parámetros que produce el mejor ajuste y las líneas finas de puntos las curvas esfuerzo-deformación sintéticas después de cambiar uno a uno los valores de los parámetros en la cantidad que se muestra en cada gráfico.

esos mismos parámetros. En la sección «Derivación del parámetro de daño» ya hemos expuesto la forma en que se pueden calcular la porosidad inicial de grietas y la esfericidad de las mismas. Ambos parámetros se han obtenido del experimento hidrostático TRY3, el primero por un ajuste exponencial a la curva porosidad-presión y el segundo mediante el método de Morlier, que hace uso de la segunda derivada de dicha curva. Por su parte, el módulo de Young del sólido sin grietas se puede calcular a partir de la pendiente de la parte recta de la curva esfuerzo-deformación (segmento situado entre el final de la zona basal y el comienzo de la zona de endurecimiento por esfuerzo). Finalmente, el coeficiente de Poisson del sólido sin grietas, aunque no queda resuelto por el método, puede aproximarse como una media de los valores citados en la literatura para rocas muy poco porosas (por ejemplo, Touloukian *et al.*, 1981).

La tabla 5 compara los valores estimados con los valores calculados independientemente para los cuatro parámetros del modelo. La comparación incluye el coeficiente de Poisson del sólido sin grietas aunque, como ya se ha discutido anteriormente, este parámetro no queda bien resuelto por el procedimiento de inversión. El módulo de Young del sólido sin grietas queda muy bien aproximado por el modelo. El valor experimental es de 10,9 GPa y el rango de valores estimados (dependiendo del tipo de modelo de sólido fracturado utilizado) es de 11-11,5 GPa.

La esfericidad media de las grietas estimada por el método de inversión está dentro del rango de esfericidades calculado con el método de Morlier (los valores experimentales están en el rango 0,005-0,02 y los estimados entre 0,007 y 0,015). Es importante hacer notar que tanto los valores estimados como los calculados por el método de Morlier

Tabla 5.—Comparación de los valores experimentales con los valores derivados experimentalmente para los cuatro parámetros del modelo.

Parámetro	Modelo	Experimento
$E_0$	11,0-11,5 GPa	10,9 GPa <sup>a</sup>
$\nu_0$	0,15-0,2	0,11-0,25 <sup>b</sup>
$r$	0,007-0,015	0,005-0,02 <sup>c</sup>
$\theta_0$	0,1 %-0,26 %	1,9 % <sup>d</sup>

<sup>a</sup> De la pendiente de la parte recta de la curva esfuerzo-deformación experimental.

<sup>b</sup> Rango de valores para rocas de baja porosidad (Touloukian *et al.*, 1981).

<sup>c</sup> Por el método de Morlier sobre los datos del experimento hidrostático TRY3.

<sup>d</sup> De un ajuste exponencial a la curva porosidad-presión del experimento hidrostático TRY3.

están de acuerdo con los valores citados en la literatura para las areniscas porosas (Zimmerman, 1991).

Finalmente, los valores estimados del coeficiente de Poisson para el sólido sin grietas también coinciden bastante bien con los citados en la literatura para rocas de baja porosidad (Touloukian *et al.*, 1981), aunque esto no es significativo dada la poca sensibilidad del modelo a este parámetro.

## Conclusiones

La medida de la conductividad eléctrica compleja en rocas saturadas durante la deformación triaxial tiene el potencial de proporcionar información muy valiosa sobre el cierre y posterior apertura y crecimiento de nuevas grietas. Es particularmente útil por dos razones: 1) es sensible a la orientación de las grietas que se están cerrando, abriendo o propagando, tres poblaciones distintas con una dinámica distintiva; y 2) es sensible al efecto que el cierre, la apertura y la propagación tiene sobre la *conectividad* de la red de grietas. Ambos factores tienen, además, una importancia decisiva en la evolución de las propiedades mecánicas de la roca.

La sensibilidad de las medidas de conductividad eléctrica a la orientación de las grietas y a su conectividad ha sido usado en este trabajo para definir un nuevo parámetro de daño sensible a la dirección. Las curvas de esfuerzo-deformación reconstruidas aplicando este parámetro de daño y los modelos de sólido fracturado sin interacción, autoconsistente y diferencial muestran un acuerdo excelente con las curvas experimentales.

La mejora que supone este nuevo parámetro de daño sobre los parámetros de daño isótropos (como los que utilizan los datos de emisión acústica) se asocia a las siguientes diferencias entre los dos

métodos. El parámetro de daño derivado de los datos de emisión acústica es un promedio volumétrico sobre todas las orientaciones de las fracturas y no tiene en cuenta si las grietas se forman de manera aislada o en grupos coalescentes. Por el contrario, el parámetro de daño derivado de los datos de conductividad eléctrica es un promedio que favorece implícitamente las grietas formadas en la dirección de mayor importancia mecánica, la dirección axial, y también tiene en cuenta de manera natural la contribución a la conectividad de las nuevas grietas formadas. Es este aumento de conectividad el que produce, en última instancia, el debilitamiento de la roca que desemboca en la aparición de una fractura macroscópica que divide la muestra en dos.

La utilización de este método para reconstruir las curvas de esfuerzo-deformación requiere un conocimiento de la conductividad eléctrica de la roca a una única frecuencia durante su deformación triaxial, la conductividad eléctrica del fluido intergranular y los cuatro parámetros listados en la tabla 5. Alternativamente, el método puede usarse como un ajuste no lineal a una curva esfuerzo-deformación conocida y estimar a partir del ajuste el valor de los cuatro parámetros. La tabla 5 pone de manifiesto que ambas metodologías producen valores compatibles de los cuatro parámetros, aunque el coeficiente de Poisson del sólido sin grietas no queda bien resuelto por el procedimiento. Como el método es sensible a tres de los cuatro parámetros (módulo de Young del sólido sin grietas, porosidad de grietas inicial y esfericidad media de las grietas), ofrece la interesante posibilidad de estimar estos parámetros mecánicos de una forma completamente independiente a otros métodos. Hasta donde el autor conoce, esta es la primera vez que unos parámetros mecánicos (como el módulo de Young, la esfericidad de las grietas o la densidad inicial de grietas) han sido estimados haciendo uso únicamente de una propiedad de transporte como es la conductividad eléctrica. Las implicaciones de este hecho son importantes, ya que en determinadas circunstancias puede resultar más sencillo realizar medidas de conductividad eléctrica en función de la deformación que calcular los parámetros microestructurales que esta técnica de reconstrucción permite estimar.

## Apéndice A: Modelo sin interacción de sólido fracturado

### *Grietas secas en moneda con orientación aleatoria*

Walsh (1965a, 1965b) derivó la expresión general para el módulo de Young efectivo de un cuerpo con cavidades de forma y orientación arbitrarias haciendo uso del teorema de reciprocidad de Betti:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_0} + \frac{\partial \Delta w}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{ij}}, \quad (A1)$$

donde  $E$  es el módulo de Young del sólido fracturado,  $E_0$  es el módulo de Young de la matriz (sólido intacto) y  $\Delta w$  es el aumento de la densidad de energía de deformación debido a la presencia de las grietas. Aplicando un esfuerzo uniaxial de prueba  $\sigma_{33}$  la ecuación anterior se reduce a:

$$\frac{1}{E} = \frac{1}{E_0} + \frac{2\Delta w}{\sigma_{33}^2}. \quad (A2)$$

Esta última ecuación es válida para cavidades de cualquier forma, pero para resolverla explícitamente se necesita una expresión de  $\Delta w$  para grietas con una geometría particular. Walsh basó su modelo en la solución analítica del campo de esfuerzos alrededor de una grieta 2D elíptica de esfericidad muy baja. Aquí se usará, en cambio, la solución elástica para una grieta 3D en moneda bajo un esfuerzo uniaxial  $\sigma_{33}$ , para la cual la expresión del aumento de la densidad de energía de deformación (después de promediar sobre todos los ángulos, asumiendo una orientación aleatoria de las grietas) tiene la forma (Kemeny y Cook, 1986)

$$\Delta w = \frac{8(1-\nu^2)(10-3\nu_0)}{45E_0(2-\nu_0)} \frac{\sigma_{33}^2 n_f \bar{l}^3}{V}. \quad (A3)$$

Insertando esta ecuación en (A2), se obtiene

$$\frac{E}{E_0} = \left\{ 1 + \frac{16(1-\nu^2)(10-3\nu_0)}{45E_0(2-\nu_0)} \frac{n_f \bar{l}^3}{V} \right\}^{-1} \quad (A4)$$

y recordando la definición del parámetro escalar de densidad de grietas, ecuación (4), se puede expresar finalmente el módulo de Young efectivo en términos del PDG  $\chi$ :

$$\frac{E}{E_0} = \left\{ 1 + \frac{16(1-\nu^2)(10-3\nu_0)}{45E_0(2-\nu_0)} \chi \right\}^{-1}. \quad (A5)$$

### Grietas saturadas en moneda con orientación aleatoria

El cambio en la densidad de energía de deformación elástica  $\Delta w$  de un sólido debido a la presencia de cavidades esféricas oblatas saturadas de agua con orientaciones arbitrarias es (Kachanov, 1992):

$$\Delta w = \frac{16(1-\nu^2)}{3E_0(2-\nu_0)} \left\{ \sigma_{ik} \sigma_{kj} \alpha_{ij} - \left[ 1 - \frac{1}{2}(2-\nu_0) \frac{\delta}{1+\delta} \right] \sigma_{ij} \gamma_{ijkl} \sigma_{kl} \right\}, \quad (A6)$$

donde  $\alpha_{ij}$  es el tensor de segundo orden de densidad de grietas, ecuación (9), y  $\gamma_{ijkl} = (1/V) \sum_m (P n_i n_j n_k n_l)_m$  es un tensor de cuarto orden de densidad de grietas que tiene en cuenta las desviaciones de la ortotropía (que en el caso de grietas saturadas de agua puede ser importante). Tanto  $\alpha$  como  $\gamma$  son tensores simétricos con respecto a la reordenación de subíndices. La sensibilidad de la presión de fluido en las cavidades al esfuerzo aplicado viene determinada únicamente por la constante adimensional  $\delta$ ,

$$\delta = \frac{9\pi}{16} \frac{1-2\nu}{2-\nu_0^2} \frac{K_0}{K_f} r \quad (A7)$$

donde  $K_0$  es el módulo de compresibilidad de la matriz sólida,  $K_f$  el módulo de compresibilidad del fluido y  $r$  la esfericidad de la cavidad. La constante  $\delta$  caracteriza el acoplamiento entre el esfuerzo y la presión de fluidos y determina el impacto que el fluido tiene sobre el módulo elástico efectivo.

En el caso particular de cavidades orientadas al azar,  $\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \chi/3$ ,  $\gamma_{1111} = \gamma_{2222} = \gamma_{3333}$  y  $\gamma_{1122} = \gamma_{1133} = \gamma_{2233} = \gamma_{1212} = \gamma_{1313} = \gamma_{2323} = \gamma_{1111}/3$ , con  $(1/V) \sum_k (P n_i n_j n_k n_l)_k = \chi$  (Kachanov, 1992, Sayers y Kachanov, 1991). Con estos valores, la ecuación (A6) se transforma en:

$$\Delta w = \frac{16(1-\nu^2)}{3E_0(2-\nu_0)} \left\{ \frac{\chi}{3} \sigma_{ik} \sigma_{kj} - \left[ 1 - \frac{1}{2}(2-\nu_0) \frac{\delta}{1+\delta} \right] \frac{\chi}{5} \sigma_{kk}^2 \right\}. \quad (A8)$$

Nótese que si asumimos un esfuerzo uniaxial de prueba  $\sigma_{33}$  y grietas secas ( $K_f = 0$ ), entonces  $\delta/(1+\delta) \rightarrow 1$  y la ecuación (A8) se reduce a la ecuación (A3).

De la definición de conformidades elásticas (el inverso de la matriz de rigidez), podemos escribir el cambio en conformidad debido a la presencia de las cavidades como  $\Delta S_{ijkl} = \partial^2 \Delta w / \partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}$ . Recordando la relación que existe entre conformidad y módulo de Young,  $S_{1111} = 1/E$  y el hecho de que  $1/E = 1/E_0 + \Delta S_{1111}$ , podemos escribir finalmente el módulo de Young efectivo en la siguiente forma:

$$\frac{E}{E_0} = \left\{ 1 + \frac{32(1-\nu^2)}{9(2-\nu_0)} \left[ 1 - \frac{3}{5} \left( 1 - \frac{1}{2}(2-\nu_0) \frac{\delta}{1+\delta} \right) \right] \chi \right\}^{-1}. \quad (A9)$$

Para grietas en moneda, para las cuales  $A \rightarrow 0$ , tenemos que  $\delta \rightarrow 0$  y (A9) se simplifica a

$$\frac{E}{E_0} = \left[ 1 + \frac{64(1-\nu^2)}{45(2-\nu_0)} \chi \right]^{-1}. \quad (A10)$$

### Apéndice B: Evolución de la porosidad para poros esféricos en condiciones drenadas

Sea un sólido de volumen inicial  $V_0$  con  $n_h$  cavidades esféricas de radio inicial  $a_0$ . Si el volumen fraccional de cavidades es suficientemente pequeño para suponer que las zonas donde los esfuerzos están perturbados no interaccionan entre sí (límite diluido), entonces las variables de campo en el entorno de las cavidades tendrán simetría esférica. Bajo una presión hidrostática remota  $P_c$  las componentes de los desplazamientos en coordenadas esféricas son (Nemat-Nasser y Horii, 1993):

$$u_r(r) = \frac{P_c}{3\lambda + 2\mu} r + \frac{P_c a_0^3}{4\mu} \frac{1}{r^2}, \quad (B1)$$

$$u_\theta = 0,$$

$$u_\psi = 0,$$

donde  $\lambda$  y  $\mu$  son las constantes de Lamé para la matriz. Estamos interesados en el desplazamiento radial de la pared de la cavidad, es decir, el desplazamiento en  $r = a_0$ , que es

$$u_r(a_0) = P_c \frac{1-\nu_0}{2K_0(1-2\nu_0)} a_0, \quad (B2)$$

donde hemos sustituido los parámetros de Lamé por el módulo volumétrico y el coeficiente de Poisson de la matriz.

El radio final de cada cavidad será  $a = a_0 + u_r(a_0)$  o, usando (B2),

$$a = a_0 \left[ 1 + \frac{1-\nu_0}{2K_0(1-2\nu_0)} P_c \right]. \quad (B3)$$

El volumen inicial de las cavidades es  $V_0 = n_h 4/3\pi a_0^3$  y la porosidad de poros inicial

$$\eta_0 = \frac{4}{3} \pi n_h a_0^3 / V_0. \quad (B4)$$

Por otro lado, el volumen final de las cavidades es  $V = n_i 4/3 \pi a^3$  y la porosidad final

$$\eta = \frac{4}{3} \pi n_i a^3 / V, \quad (B5)$$

donde  $V$  es el volumen final total (matriz + poros). Dividiendo (B3) y (B5) obtenemos el cambio de porosidad al aumentar la presión confinante de 0 a  $P_c$ :

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \left( \frac{a}{a_0} \right)^3 \left( \frac{V_0}{V} \right) \quad (B6)$$

y, usando (B3) y la aproximación  $(1 + ax)^3 \simeq 1 + 3ax \ll 1$ ,

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \left[ 1 + \frac{3(1 - v_0)}{2K_0(1 - 2v_0)} P_c \right] \left( \frac{V_0}{V} \right). \quad (B7)$$

Podemos expresar  $V/V_0$  en términos del módulo volumétrico efectivo,  $K$ , a través de la ley de Hook:

$$\frac{V}{V_0} = 1 + \frac{P_c}{K}. \quad (B8)$$

Para escribir esta ecuación hemos usado la definición de deformación volumétrica  $\varepsilon = (V - V_0)/V_0$  y el hecho de que  $\varepsilon = 3\varepsilon_{11}$  en condiciones hidrostáticas. Insertando (B8) en (B7) y reordenando términos obtenemos

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{K}{K + P_c} \left[ 1 + \frac{3(1 - v_0)}{2K_0(1 - 2v_0)} P_c \right]. \quad (B9)$$

El módulo efectivo  $K$  también depende de la porosidad. Para el caso de cavidades esféricas no interactuales y distribuidas aleatoriamente se puede expresar de forma muy simple en términos de la porosidad y de las propiedades materiales de la matriz (e.g., Nemat-Nasser y Horii, 1993, pág. 108):

$$\frac{K}{K_0} = \left[ 1 + \frac{3(1 - v_0)}{2(1 - 2v_0)} \eta \right]^{-1}. \quad (B10)$$

Las ecuaciones (B9) y (B10) están acopladas a través de la porosidad  $\eta$  y deben resolverse simultáneamente para obtener el cambio de porosidad en función de la presión confinante  $P_c$ . Es importante recordar que estas ecuaciones sólo son válidas para porosidades pequeñas ( $\eta_0 < 0,15$ ) y para presiones confinantes pequeñas comparadas con el módulo de Young de la matriz ( $P_c < 1$  GPa).

Cuando  $P_c \ll K$ , como es el caso de todos los experimentos realizados, las ecuaciones anteriores se pueden desacoplar, ya que en ese caso  $K/(K + P_c) \simeq 1$  en la ecuación (B9) y, por tanto,  $\eta \simeq \eta_0(1 + kP_c)$ , siendo  $k$  una constante que sólo depende de las propiedades elásticas de la matriz. En particular, en el experimento hidrostático TRY3 la presión se varió desde 0 hasta 250 MPa y la porosidad de huecos inicial era de  $\eta_0 = 0,157$  (ver tabla 4). Para  $P_c = 250$  MPa obtenemos una porosidad final de  $\eta = 0,1586$  y un cambio de porosidad de 0,16 % en valor absoluto, mucho menor que el cambio de porosidad de grietas en ese mismo rango de presiones (~ 2 % para la muestra TRY3). Debido a ello, es lícito ignorar este pequeño cambio en la porosidad de poros en comparación con el cambio total de porosidad y asumir que la variación de porosidad en función de la presión se debe exclusivamente al cambio de volumen de la población de grietas.

## Notación

Símbolo	Significado
$A$	área representativa, área de la grieta.
$A_1, A_2, A_3$	parámetros de ajuste.
$E_0, E$	módulos de Young intrínseco y efectivo.
$E'$	módulo de Young de la roca sin grietas pero con poros.
$K_0, K_f, K$	módulos volumétricos intrínseco, del fluido y efectivo.
$P_c$	presión confinante.
$P_f$	presión del fluido intergranular.
$P^*$	presión de cierre.
$\hat{P}$	factor de escala del ajuste exponencial (unidades de presión).
$V$	volumen representativo, volumen de la grieta, volumen final.
$V_0$	volumen inicial.
$a_0$	radio inicial de una cavidad esférica.
$a, b, c$	semiejes del elipsoide.
$g$	función de $v_0$ —depende del modelo (ver tabla 1).
$h'$	distribución inicial de esfericidades de grietas.
$h$	distribución inicial normalizada de esfericidades de grietas.
$l$	semilongitud de la grieta.
$m$	exponente de Archie.
$n_f$	número de grietas.
$n_h$	número de poros.
$r$	esfericidad de las grietas.
$r_M$	esfericidad de corte de las grietas.
$\Phi$	porosidad volumétrica.
$\sum_r$	conductividad de la roca saturada @ 1 kHz.
$\sum_f$	conductividad del fluido @ 1 kHz.
$\alpha$	tensor de densidad de grietas.
$\beta$	tensor de densidad de poros.
$\chi$	parámetro de densidad de grietas escalar, parámetro de daño.
$\delta$	constante de acoplamiento entre esfuerzo y presión de fluidos.
$\varepsilon$	deformación axial.
$\phi$	porosidad eléctrica.
$\phi_0$	porosidad eléctrica @ $P_c = 0$ .
$\phi_i$	porosidad eléctrica @ $\varepsilon = 0$ .
$\gamma$	tensor de densidad de grietas de cuarto orden.
$\eta$	porosidad de poros.
$\eta_0$	porosidad de poros @ $P_c = 0$ .
$\nu_0, \nu$	coeficientes de Poisson intrínseco y efectivo.
$\theta$	porosidad de grietas.
$\theta_0$	porosidad de grietas @ $P_c = 0$ .
$\sigma_m$	esfuerzo axial sintético.
$\sigma_{ef}$	esfuerzo efectivo.
$\xi$	parámetro de densidad de poros escalar, porosidad de poros.

## AGRADECIMIENTOS

El autor quiere agradecer a Paul W. J. Glover y Philip G. Meredith su inestimable ayuda y colaboración durante la estancia en el Rock and Ice Physics Laboratory (University College London), donde este trabajo se inició. El agradecimiento se hace extensible a Juan Manuel Alvarez Tostado, actualmente en el Instituto Mexicano del Petróleo (Ciudad de México), por su paciencia al introducir al autor en el mundo de los parámetros tensoriales de densidad de grietas.

## Referencias

- Anderson, D. L., Minster, B. y Cole, D. (1974). The effect of oriented cracks on seismic velocities. *J. Geophys. Res.*, 79: 4011-4015.
- Archie, G. E. (1942). The electrical resistivity log as an aid in determining some reservoir characteristics. *Trans. A.I.M.E.*, 142: 54-61.
- Artemieva, I. M. (1996). The dependence of transport properties of in-situ rocks on pore fluid composition and temperature. *Surv. Geophys.*, 17: 289-306.
- Atkinson, B. K. (ed.) (1987). *Fracture mechanics of rock*, Academic Press, Londres, 533 págs.
- Ayling, M. R., Meredith, P. G. y Murrell, S. A. F. (1995). Microcracking during triaxial deformation of porous rocks monitored by changes in rock physical properties. I. Elastic-wave propagation measurements on dry rocks. *Tectonophysics*, 245: 205-221.
- Bristow, J. R. (1960). Microcracks and the static and dynamic elastic constants of annealed and heavily cold-worked metals. *British J. Appl. Phys.*, 11: 81-85.
- Bruner, W. M. (1976). Comment on «Seismic velocities in dry and saturated cracked solids» by Richard J. O'Connell and Bernard Budiansky. *J. Geophys. Res.*, 81: 2573-2576.
- Budiansky, B. y O'Connell, R. J. (1976). Elastic moduli of cracked solid. *Int. J. Solid Struct.*, 12: 81-97.
- Cox, S. J. D. y Meredith, P. G. (1993). Microcrack formation and material softening in rock measured by monitoring acoustic emissions. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, 30: 11-24.
- Cheng, C. H. (1993). Crack models for a transversely isotropic medium. *J. Geophys. Res.*, 98: 675-684.
- Glover, P. W. J., Gómez, J. B., Meredith, P. G., Boon, S. A., Sammonds, P. R. y Murrell, S. A. F. (1996). Modelling the stress-strain behaviour of saturated rocks undergoing triaxial deformation using complex electrical conductivity measurements. *Surveys in Geophysics*, 17: 307-330.
- Glover, P. W. J., Gómez, J. B. y Meredith, P. G. (2000). Fracturing in saturated rocks undergoing triaxial deformation using complex electrical conductivity measurements: experimental study, *Earth. Planet. Sci. Lett.*, 5621: 201-213.
- Glover, P. W. J., Meredith, P. G., Sammonds, P. R. y Murrell, S. A. F. (1994a). Measurements of complex electrical conductivity and fluid permeability in porous rocks at raised confining pressures. In: *Rock Mechanics in Petroleum Engineering*, Proceedings de EUROCK'94, SPE/ISRM International Conference, Delft, Holanda, Balkema, Amsterdam, págs. 29-36.
- Glover, P. W. J., Meredith, P. G., Sammonds, P. R. y Murrell, S. A. F. (1994b). Ionic Surface Electrical Conductivity in Sandstone. *J. Geophys. Res.*, 99: 21635-21650.
- Guéguen, Y. y Palciauskas, V. (1994). *Introduction to the Physics of Rocks*, Princeton Univ. Press, New Jersey, USA, 294 págs.
- Heney, F. S. y Pomphrey, N. (1982). Self-consistent moduli of a cracked solid. *Geophys. Res. Lett.*, 9: 903-906.
- Hill, R. (1952). The elastic behaviour of a crystalline aggregate. *Proc. Phys. Soc. London, Ser. A.*, 65: 349-354.
- Hoening, A. (1979). Elastic moduli of a non-randomly cracked body. *Int. J. Solid Struct.*, 15: 137-154.
- Hudson, J. A. (1986). A higher order approximation to the wave propagation constants for a cracked solid. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 87: 265-274.
- Kachanov, M. (1980). Continuum model of medium with cracks. *J. Eng. Mech. Div. Am. Soc. Civ. Eng.*, 106: 1039-1051.
- Kachanov, M. (1992). Effective elastic properties of cracked solids: critical review of some basic concepts. *Appl. Mech. Rev.*, 45: 304-335.
- Kachanov, M. (1993). On the effective moduli of solids with cavities and cracks. *Int. J. Frac.*, 59: R17-R21.
- Kachanov, M., Tsukrov, I. y Shafiro, B. (1994a). Effective moduli of solids with cavities of various shapes. *Appl. Mech. Rev.*, 47: S151-S174.
- Kachanov, M., Tsukrov, I. y Shafiro, B. (1994b). On anisotropy of solids with non-randomly oriented cavities. In: Bažanant, Z. P., Bittnar, Z., Jirásek, M., and Mazars, J. (eds.). *Fracture and Damage in quasibrittle structures*, 19-24.
- Kemeny, J. y Cook, N. G. W. (1986). Effective moduli, non-linear deformation and strength of a cracked elastic solid. *Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, 23: 107-118.
- Lawn, B. (1993). *Fracture of brittle solids*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K., 375 págs. (2.<sup>a</sup> ed.).
- Meredith, P. G. y Atkinson, B. K. (1983). Stress corrosion and acoustic emission during tensile crack propagation in Whin Sill dolerite and other basic rocks. *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 75: 1-21.
- Morlier, P. (1971). Description de l'état de fissuration d'une roche à partir d'essais non-destructifs simples. *Rock Mechanics*, 3: 125-138.
- Ismail, I. A. H. y Murrell, S. A. F. (1976). Dilatancy and the strength of rocks containing pore water under undrained conditions. *Geophys. J. R. Astron. Soc.*, 44: 107-134.
- Nemat-Nasser, S. y Horii, M. (1993). *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, North-Holland, Amsterdam, 687 págs.
- O'Connell, R. J. y Budiansky, B. (1974). Seismic velocities in dry and saturated cracked solids. *J. Geophys. Res.*, 79: 5412-5426.
- Reuss, A. (1929). Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle. *Z. Angew. Math. Mech.*, 9: 49-58.
- Sammonds, P. R., Meredith, P. G., Murrell, S. A. F. y Main, I. G. (1994). Modelling the damage evolution in rock containing a pore fluid by acoustic emission. In: *Rock Mechanics in Petroleum Engineering*, Proceedings de EU-ROCK'94, SPE/ISRM International Conference, Delft, Holanda, Balkema, Amsterdam, págs. 29-36.
- Sayers, C. M. (1988). Stress-induced ultrasonic wave velocity anisotropy in fractured rocks. *Ultrasonics*, 26: 311-317.
- Sayers, C. M. y Kachanov, M. (1991). A simple technique to finding effective elastic constants of cracked solids for arbitrary crack orientation statistics. *Int. J. Solid Struct.*, 27: 671-680.
- Sayers, C. M. y Kachanov, M. (1995). Microcrack-induced elastic wave anisotropy of brittle rocks. *J. Geophys. Res.*, 100: 4149-4156.
- Simmons, G. y Wang, H. (1971). *Single crystal elastic constants and calculated aggregate properties: a handbook*, The MIT Press, Cambridge, MA, EE.UU., 370 págs. (2.<sup>a</sup> ed.).

- Soga, N., Mizutani, H., Spetzler, H. y Martin, R. J. (1978). The effect of dilatancy on velocity anisotropy in Westerly granite. *J. Geophys. Res.*, 83: 4451-4456.
- Touloukian, Y. S., Judd, W. R. y Roy, R. F. (1981). *Physical properties of rocks and minerals*, McGraw-Hill/CINDAS Data Series on Material Properties, vol. II-2, Mac Graw-Hill, 549 págs.
- Voigt, W. (1928). *Lehrbuch der Krystallophysik*, B. G. Teubner, Leipzig, 962 págs.
- Walsh, J. B. (1965a). The effect of cracks on the compressibility of Rock. *J. Geophys. Res.*, 70: 381-389.
- Walsh, J. B. (1965b). The effect of cracks on the Uniaxial Elastic Compression of Rocks, *J. Geophys. Res.*, 70: 381-389.
- Walsh, J. B. (1969). New analysis of attenuation in partially melted rocks. *J. Geophys. Res.*, 74: 4333-4337.
- Yukutake, H. (1989). Fracturing process of granite inferred from measurements of spatial and temporal variations in velocity during triaxial deformation. *J. Geophys. Res.*, 94: 15639-15651.
- Zimmerman, R. W. (1985). Compressibility of an isolated spheroidal cavity in an isotropic elastic medium. *ASME J. Appl. Mech.*, 52: 606-608.
- Zimmerman, R. W. (1991). *Compressibility of sandstones*, Elsevier, Amsterdam, 173 págs.

Recibido el 6 de septiembre de 2001.  
Aceptado el 18 de diciembre de 2001.