

ANÁLISIS DE LA CONTINUIDAD ESPACIAL DE DATOS HIDROGEOQUÍMICOS: COMPARACION DE DIFERENTES ESTIMADORES DE LA FUNCIÓN VARIOGRAMA

R. Jiménez Espinosa * y M. Chica Olmo *

RESUMEN

Es un hecho frecuente que al analizar la continuidad espacial de una variable regionalizada, ésta presente características diferentes de las consideradas ideales para aplicar el estimador clásico y tradicional de la función variograma. El estimador del variograma, a partir de las diferencias cuadráticas medias de la variable, se presenta como óptimo cuando la variable cumple una serie de condiciones tales como normalidad de la distribución, muestreo regular y representativo o no existencia de «outliers», que a veces en la práctica no se verifican. Por esta razón es importante analizar la continuidad espacial a través de otros estimadores de la función variograma. En este trabajo se estudian tres estimadores alternativos de dicha función: el estimador de Cressie y Hawkins y dos estimadores de ponderación univariante, uno basado en la Función de Distribución Acumulada y el otro basado en la Función de Densidad de Probabilidad.

Para ilustrar la utilidad de estos estimadores alternativos al tratar variables alejadas de las condiciones ideales, se han aplicado a un conjunto de datos hidrogeoquímicos procedentes del acuífero de la Vega de Granada, cuyos resultados se describen en el texto.

Palabras clave: *Continuidad espacial, Función variograma, Estimador del variograma.*

ABSTRACT

Determination of the spatial continuity by means of variogram function implies to treat with variables not following ideal conditions for applying the classic and traditional estimator of variogram function. This estimator performs very well for normal processes, regular and representative sampling and absence of outliers. In this paper we make a revision of three alternative methods to perform estimation of variogram values: Cressie and Hawkins estimator and two univariate weighting estimators, one based on the Cumulative Distribution Function and other based on the Probability Density Function.

A hydrogeochemical data set from «Vega de Granada» aquifer is used to explore the performance of the traditional variogram and three alternatives. The results of these applications are described in the paper.

Key words: *Spatial continuity, Variogram function, Variogram estimator.*

Introducción

El término Geoestadística es el nombre dado por Matheron (1963) para proponer una metodología de análisis espacial de datos a partir de muestras cuyas localizaciones espaciales son conocidas y que fue usado inicialmente en el estudio de reservas mineras. En

el campo de la Hidrogeología son ya numerosos los estudios realizados, tanto para el tratamiento de parámetros hidrogeoquímicos de acuíferos, como de calidades hidrogeoquímicas de las aguas subterráneas.

El estudio de la continuidad espacial de la variable es uno de los pilares básicos de la Geoestadística, de ahí que una cuantificación de la mayor o me-

* Grupo de Investigación «Geoestadística y Teledetección», Dpto. de Geodinámica-IAGM, Universidad de Granada-CSIC, Avda. Fuentenueva s/n, 18071 Granada.

nor semejanza entre pares de valores, como una función de su vector de separación h , suponga una parte esencial del estudio de un conjunto de datos espacialmente distribuidos. En casos como el de datos de calidad de aguas subterráneas o minería las observaciones se suelen presentar dispersas e irregularmente espaciadas, por lo que la descripción espacial de este tipo de variables implica el primer paso hacia la meta última de la estimación geoestadística.

La continuidad espacial, o mejor dicho la variabilidad espacial, se caracteriza por medio de la llamada función variograma $\gamma(h)$, que se define como una función intrínseca que cuantifica la mitad de la esperanza matemática de los incrementos cuadráticos de primer orden de la variable regionalizada $Z(x)$:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E \{ [Z(x) - Z(x+h)]^2 \}$$

Esta función es estimada por medio del variograma experimental $\gamma^*(h)$, algunos de cuyos estimadores serán objeto de estudio en este trabajo.

Estimador tradicional del variograma (ver Apéndice para notación)

Este estimador de los valores del variograma se define según la siguiente relación:

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N_h} \sum_{i,j \in D_h} [Z^0(x_i) - Z^0(x_j)]^2$$

Este estimador presenta las siguientes características:

— Es un estimador no paramétrico del valor del variograma.

— Se presenta como un estimador óptimo en el caso de disponer de una malla de muestreo regular y representativa y una distribución normal. En estas condiciones el sesgo que se produce al estimar el variograma es el mínimo posible.

En la práctica, este variograma experimental produce, a menudo, resultados erráticos disminuyendo la eficacia del estimador tradicional. Esto se debe a que aparecen desviaciones del llamado caso ideal de aplicación de dicha fórmula (Omre, 1985). Estas desviaciones pueden ser definidas en orden de importancia como sigue:

— **Desviaciones en la distribución:** $Z(x)$, $Z(x+h)$ no pueden ser representadas apropiadamente por una distribución binormal. Las desviaciones implican las características del fenómeno por sí mismo, es decir, $Z(x)$ es no-negativa para todo x o la distribución

univariante de $Z(x)$ es sesgada y con grandes colas. Se sabe por teoría de probabilidades que la normalidad univariante no implica la normalidad bivariante. De aquí que una transformación de la variable regionalizada hacia una normalidad univariante no necesariamente elimina las desviaciones distribucionales.

Este tipo de desviaciones hacen que la eficacia del estimador tradicional disminuya drásticamente con el incremento de las desviaciones de la binormalidad.

— **Heterocedasticidad:** los datos se dice que son heterocedásticos cuando al realizar un diagrama de m (media) frente a la desviación típica σ , calculadas sobre vecindades móviles, muestra que la dispersión de los valores (medidos por σ) está relacionada con su magnitud (medida por m) (Srivastava y Parker, 1989). Esto implica que al ser el variograma una medida de la dispersión, su magnitud está ligada a la magnitud de los valores de los datos. Cuando se da este tipo de fenómenos se dice que existe un efecto proporcional.

— **Desviaciones en el muestreo:** las observaciones $\{Z(x_i), i=1,N\}$ no están muestreadas de forma aleatoria. Se produce un sesgo en el muestreo con las localizaciones de las muestras tendentes a estar agrupadas en áreas de altos o bajos valores («clustering»). Estas desviaciones pueden ser fácilmente puestas de manifiesto realizando un gráfico de n , número de muestras frente a m , media para vecindades móviles de un tamaño determinado. Este tipo de diagramas muestran que la densidad de muestras (medida por n) está relacionada con la magnitud de los valores (medida por m). Cuando se da una desviación de este tipo los pares de observaciones utilizados para estimar el variograma no son representativos de la variable regionalizada, puesto que se les da a todas las muestras el mismo peso.

— **Existencia de «outliers»:** la variable regionalizada no puede esperarse que esté siempre muestreada de forma precisa. Normalmente las observaciones son correctas, pero a veces suelen aparecer observaciones discordantes que pueden ser debidas a errores humanos y/o mal funcionamiento de los aparatos de medida. Si es posible constatar que un valor de éstos es erróneo lo mejor es eliminarlo, aunque esto no siempre es factible, de ahí que la eliminación de estas observaciones puedan causar una subestimación del potencial de un área. El estimador tradicional es muy sensible a la presencia de «outliers», como puede verse en el trabajo de Jiménez-Espinosa y Chica-Olmo (1992).

Todas estas desviaciones del caso ideal hacen que se aborden nuevas alternativas para encontrar nuevos estimadores del variograma más robustos y resistentes que el estimador clásico.

Es conveniente hacer una distinción entre robustez y resistencia al hablar de estimaciones del variograma (Dowd, 1984). En general, robustez se refiere a una falta de susceptibilidad a los efectos de suposiciones incorrectas (usualmente no normalidad), considerándose en este trabajo la robustez relacionada con las desviaciones distribucionales. Un estimador del variograma es distribucionalmente robusto cuando tiene una alta eficacia para la distribución idealizada o asumida, la normal, y se aplica bien a una amplia variedad de desviaciones de esta distribución. Por otra parte, se dice que un estimador es resistente cuando un cambio en unos pocos datos no cambia sustancialmente el valor de la estimación (p.e. los «outliers»). Como se ha visto la robustez está relacionada con desviaciones de la normalidad, mientras que la resistencia puede o no depender del tipo de distribución: un dato «outlier» puede aparecer tanto en una distribución normal como en una altamente sesgada.

Estimadores alternativos del variograma (ver Apéndice para notación)

El estimador de Cressie y Hawkins

Este estimador presentado como una alternativa robusta al estimador tradicional por Cressie y Hawkins (1980) se define como:

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2} \left(0.457 + \frac{0.494}{N_h} \right)^{-1} \left[\frac{1}{N_h} \sum_{(ij)} (|Z^0(x_i) - Z^0(x_j)|)^2 \right]^4$$

El estimador considera la diferencia entre las dos variables aleatorias y realiza una transformación de la diferencia con el fin de hacer su distribución simétrica. El centro de esta distribución se determina por el promedio de las diferencias transformadas. Además, es necesario aplicar el momento de orden cuarto para devolver el promedio a su escala correcta. El coeficiente, que aparece como denominador, se incluye para hacer el estimador insesgado, al ser este coeficiente un término corrector del sesgo que asegura que $E(\gamma^*(h)) \approx \gamma(h)$.

Aunque el estimador Cressie y Hawkins se presenta como óptimo en condiciones de normalidad, no obstante, este estimador automáticamente infravalora los datos contaminados, mientras que en el estimador tradicional los términos cuadráticos exageran la contaminación.

Estimadores de ponderación univariante

Dentro de este grupo de estimadores alternativos se incluyen tanto los basados en la Función de Distribución Acumulada (FDA) como aquellos basados en la Función de Densidad de Probabilidad (fdp) (Omre, 1985). Ambos procedimientos hacen uso del hecho de que todas las observaciones (S) pueden ser usadas en la estimación de las correspondientes FDA o fdp univariantes, según el caso.

Para un paso dado, el estimador tradicional usa sólo los pares de observaciones separados por el vector h (S_h). El conjunto S_h puede no incluir todas las observaciones de S. Este tipo de estimadores se basan en una estimación de FDA o fdp univariantes y en los pares de observaciones separadas por h , por lo que hacen más uso de la información disponible.

a) Estimador basado en la Función de Distribución Acumulada (FDA)

La forma del estimador de ponderación univariante basado en la FDA es:

$$\gamma^*(h) = \sum_{(ij) \in D_h} \alpha_{ij} (Z^0(x_i) - Z^0(x_j))^2$$

donde

α_{ij} ; $(i,j) \in D_h$ son los pesos estandarizados.

Estos pesos se obtienen a partir de todas las observaciones del conjunto S, no sólo aquellas implicadas en los pares de observaciones de S_h . Además se hace uso de una estimación de la FDA univariante, $[F^*(z)]_S$ para su cálculo.

Las características de este estimador son:

— No se requieren suposiciones paramétricas o distribucionales.

— Corrige la ausencia de fiabilidad del conjunto S_h para reproducir la distribución univariante de la función aleatoria. Las posiciones relativas de las observaciones se consideran a través del desagrupamiento de las mismas («declustering») en la estimación de la FDA univariante, $[F^*(z)]_S$.

— En el caso ideal el estimador basado en la FDA puede ser superior al tradicional, puesto que el primero está basado en más información que el segundo. El estimador tradicional es el estimador óptimo basado sólo en S_h , mientras que el de FDA usa S_h y S.

— Cuando hay desviaciones en la distribución con un muestreo no representativo y preferencial el estimador basado en la FDA presenta un sesgo menor porque los pares de las zonas preferentemente mues-

treadas son ponderados con pesos menores. Si el muestreo se hace a malla regular este estimador y el tradicional coinciden, aunque este último necesita un tiempo menor de cálculo.

— Las desviaciones por «outliers» implican un sesgo en el estimador. Este sesgo es complicado reducirlo con este estimador, puesto que en estas condiciones es difícil obtener un estimador de confianza de la FDA.

b) Estimador basado en la Función de Densidad de Probabilidad (fdp)

Como ya comentamos anteriormente, este estimador tiene un fundamento similar al del estimador basado en la FDA, simplemente que en vez de estimar la Función de Distribución Acumulada, se estima la Función de Densidad de Probabilidad. La forma de este estimador es semejante al anterior:

$$\gamma^*(h) = \sum_{(ij) \in D_h} \alpha_{ij} (Z^0(x_i) - Z^0(x_j))^2$$

donde

$\alpha_{ij}; (i,j) \in D_h$ son los pesos estandarizados.

Para realizar la estimación de la fdp se usa un estimador de tipo kernel (ver Wegman, 1972).

Las características del estimador de ponderación univariante basado en la fdp son:

— No se requieren suposiciones sobre la distribución, pero la elección de la función kernel en los estimadores kernel de la fdp implica suposiciones paramétricas indirectas.

— El estimador principalmente corrige la falta de precisión del conjunto S_h para reproducir la distribución univariante de la función aleatoria $Z(x)$. La localización relativa de las observaciones se usa para el desagrupamiento en el estimador de fdp, $[f^*(z)]_s$.

— En el caso ideal ambos estimadores de ponderación univariante presentan propiedades similares.

— En la mayoría de los casos el estimador basado en la FDA es superior al basado en la fdp.

Comparación empírica de los estimadores

Para realizar la comparación entre las diferentes alternativas de cálculo del variograma se ha utilizado un conjunto de datos de calidad de aguas subterráneas, referentes a concentraciones de nitratos (NO_3) en el acuífero de la Vega de Granada (tomado de Castillo-Martín, 1986). Este conjunto de datos está

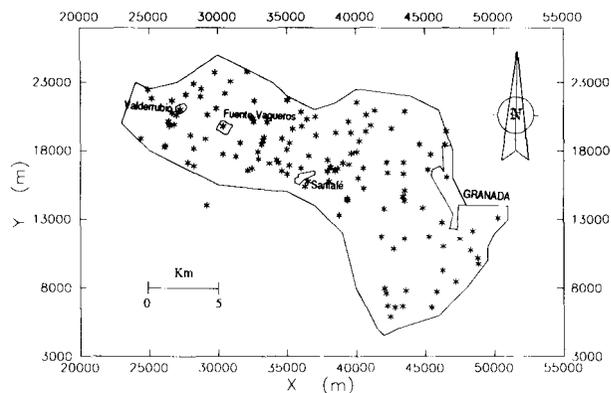


Fig. 1.—Localización espacial de las muestras.

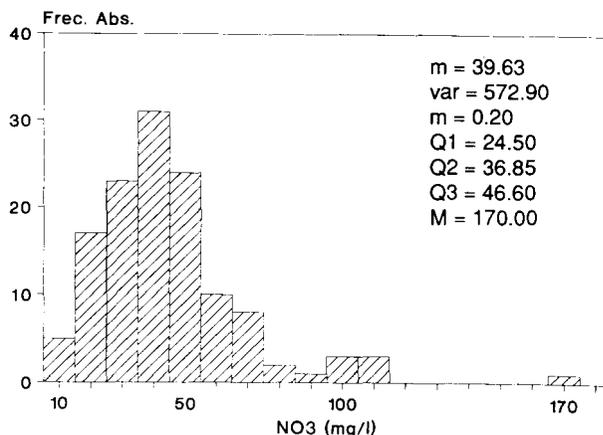


Fig. 2.—Histograma y estadísticos básicos de la variable NO_3 .

compuesto por 128 observaciones irregularmente localizadas (fig. 1), con algunas muestras agrupadas, formando «clustering», debido a las condiciones concretas de la toma de muestras, circunscrita a los pozos disponibles en el área.

En la figura 2 se muestra el histograma de frecuencias, así como los estadísticos básicos de la variable NO_3 . Como se puede observar presenta una distribución bastante sesgada positivamente, con un máximo (170 mg/l) bastante alejado del resto de los valores y que podría ser considerado como un valor «outlier».

Se calcularon los estadísticos de ventanas móviles, para una ventana cuadrada de 3 km^2 con el fin de analizar la existencia de heterocedasticidad. Posteriormente se realizó un diagrama del tipo de m vs. σ (fig. 3) en el que se observa cómo existe una clara relación entre la dispersión de los valores (σ) y la magnitud de éstos (m).

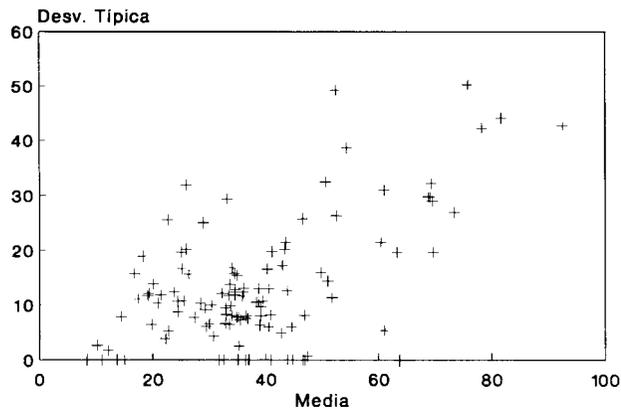


Fig. 3.—Diagrama de la media local frente a la desviación típica en vecindades móviles de 3×3 km.

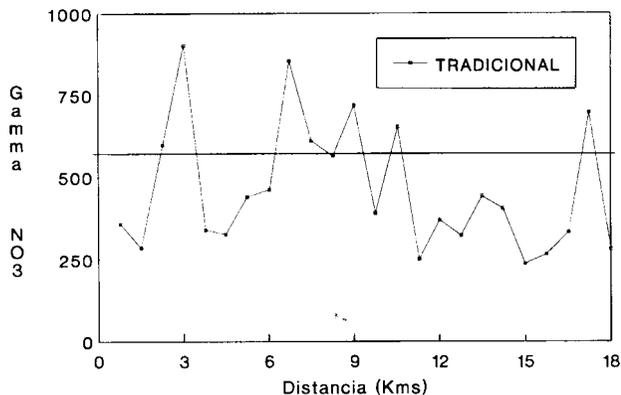


Fig. 4.—Variograma experimental de NO_3 obtenido a partir del estimador tradicional.

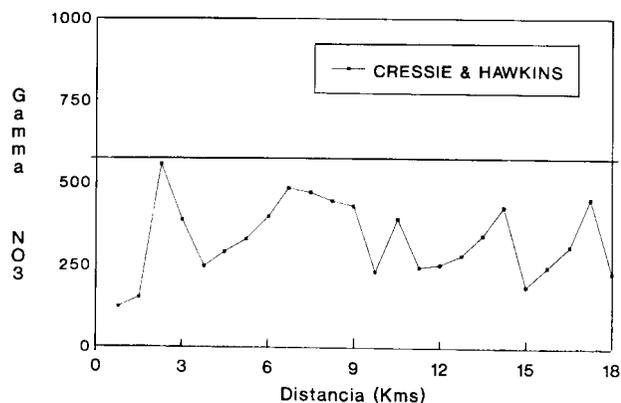


Fig. 5.—Estimación de la función variograma de NO_3 por medio del estimador de Cressie y Hawkins.

El cálculo del variograma experimental con los diferentes estimadores se realizó en la dirección N130E, dirección principal de flujo del acuífero.

Con todas las características distribucionales y de muestreo de la variable NO_3 , la estimación de la función variograma por medio del estimador tradicional no aparece como la más adecuada (fig. 4). Para este estimador tenemos un variograma experimental prácticamente carente de estructura con unos grandes picos en forma de dientes de sierra que hacen bastante difícil determinar la continuidad/variabilidad espacial de los nitratos. Es de destacar, la gran influencia que tiene el valor de 170 mg/l en la estimación del variograma, siendo responsable del enmascaramiento de la continuidad espacial de la variable. Además, la localización de las observaciones, con un muestreo bastante alejado de una malla regular, hace que la estimación aparezca con bastante sesgo.

En la figura 5 se presenta el variograma experimental calculado con el estimador de Cressie y Hawkins. Como ya hemos comentado previamente, este estimador es óptimo en condiciones de normalidad, aunque es más recomendable para casos de separación de la normalidad al infravalorar los valores extremos. Como se puede observar esta estimación se presenta con características mejores para establecer la variabilidad espacial de los nitratos, no obstante, aparecen la mayoría de los puntos del variograma por debajo del valor de la varianza experimental de los datos, lo que supone una infraestimación de la variabilidad del fenómeno bajo estudio.

El estimador de ponderación univariante basado en la Función de Distribución Acumulada, como se puede observar en la figura 6, ya permite establecer de una forma más o menos clara la estructura espacial de la variable NO_3 . Es de destacar en este tipo de estimador, al igual que en el siguiente, la utilización de una ponderación de las observaciones, realizada por medio de una técnica de desagrupamiento de las mismas, de forma que reciben menor peso aquellas muestras pertenecientes a áreas más densamente muestreadas y mayor de las áreas más dispersas. Esto hace que el muestreo selectivo sea considerado a la hora de realizar la estimación. Otra ventaja que presentan este tipo de métodos es la utilización de todo el conjunto de muestras para el cálculo del variograma, no sólo las pertenecientes a los pares de observaciones separadas por h .

El otro estimador aplicado, el estimador de ponderación univariante basado en la Función de Densidad de Probabilidad (fig. 7), se presenta como el más adecuado para realizar el análisis espacial de los NO_3 del acuífero de la Vega de Granada. Como se puede observar delimita de forma nítida la variabilidad del fenómeno, de una forma incluso mejor que

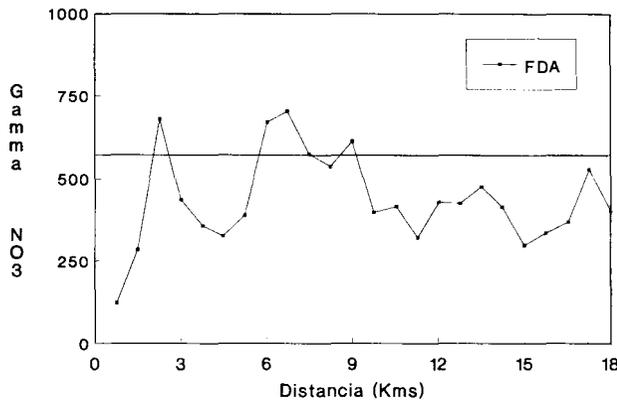


Fig. 6.—Aplicación del estimador de ponderación univariante basado en la Función de Distribución Acumulada para la obtención del variograma experimental de NO_3 .

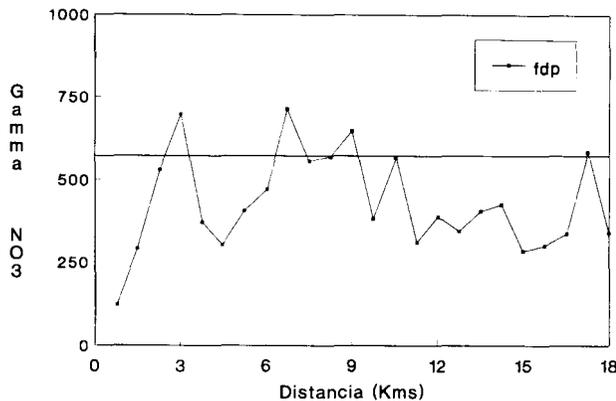


Fig. 7.—Variograma experimental de NO_3 obtenido por medio del estimador de ponderación univariante basado en la Función de Densidad de Probabilidad.

el basado en la FDA. En este caso el algoritmo de cálculo para realizar la estimación de la fdp requiere el uso de una función kernel, siendo ésta la desventaja más importante, ya que supone un mayor gasto de tiempo de cálculo que el anterior, aunque en este caso concreto con mejores resultados. Las ventajas como ya hemos indicado previamente son similares y los pesos univariantes dados a las observaciones se obtienen de forma idéntica.

De esta forma se puede cuantificar de forma clara la estructuración espacial de los nitratos. Por una parte, se observa una estructura de gran continuidad espacial con un pequeño efecto de pepita y un alcance aproximado de 3-4 km, que antes no estaba bien definida. Esta estructura nos está indicando la contaminación en nitratos del acuífero a una escala local, relacionado con la existencia de focos de contamina-

ción de un tamaño del orden del alcance del variograma (3-4 km). Por otro lado, se aprecia un efecto de periodicidad bastante nítido, con un período aproximado de 4-5 km, posiblemente relacionado con las áreas de máxima y mínima contaminación en NO_3 a lo largo del acuífero.

Conclusiones

Es un hecho demostrado que el estimador tradicional de la función variograma no se presenta como el más adecuado cuando se quiere determinar la variabilidad espacial de un conjunto de datos con algunas de las características siguientes: distribución alejada de la normal, muestreo irregular y no representativo o existencia de valores extremos. En estas condiciones se obtienen estimaciones de los valores del variograma erráticas e irreales, que no permiten caracterizar la continuidad espacial del fenómeno bajo estudio.

En este trabajo se han revisado desde un punto de vista teórico tres estimadores alternativos de la función variograma: el estimador de Cressie y Hawkins y dos estimadores de ponderación univariante, uno basado en la Función de Distribución Acumulada y el otro basado en la Función de Densidad de Probabilidad.

Para mostrar la eficacia de cada uno de los estimadores analizados hemos utilizado un conjunto de datos hidrogeoquímicos procedentes del acuífero de la Vega de Granada. Estos datos, relativos a la concentración en nitratos, presentan prácticamente todas aquellas características diferentes del caso ideal: tienen una distribución de tipo lognormal con una gran cola positiva y, además, las observaciones aparecen irregularmente localizadas, con zonas más intensamente muestreadas que otras y con fenómenos de heterocedasticidad. En estas condiciones fueron aplicados los cuatro estimadores.

Resultó evidente que la peor estimación fue la realizada con el estimador tradicional, dando lugar a un variograma experimental errático, con grandes dientes de sierra que hace prácticamente imposible establecer la continuidad espacial de esta variable.

El estimador de Cressie y Hawkins, aún no siendo el más adecuado para las características de los nitratos, ya dejaba ver más o menos la tendencia espacial de este elemento. No obstante, este estimador producía una infraestimación de los valores del variograma dando lugar a una mayoría de puntos por debajo del valor de la varianza experimental de los datos.

Los estimadores de ponderación univariante se presentaron como los más adecuados para las variables como la que se estudió, al ser estimadores que no requieren suposiciones distribucionales y por uti-

lizar una ponderación previa de las muestras (desagrupamiento). De los dos estimadores de este tipo descritos, el basado en la fdp fue el que mejor resultado dio, aunque ya con el estimador basado en la FDA se tenía definida la continuidad espacial de los nitratos de forma nítida. El único inconveniente que conlleva el primero de éstos es que requiere un mayor tiempo de cálculo que el segundo.

La variación espacial de la variable nitratos se estableció por medio de la estimación del variograma calculado a través del estimador de ponderación univariante basado en la fdp. Se observó una estructura de gran continuidad espacial de alcance aproximado de 3 a 4 km, indicando el nivel de contaminación del acuífero a escala local. Además, también se apreciaba un efecto de periodicidad relacionado con una alternancia de áreas de máxima y mínima contaminación.

AGRADECIMIENTOS

Queremos dar las gracias al Dr. Castillo Martín por permitirnos usar los datos hidrogeoquímicos para la realización de este trabajo. Además, agradecemos al Dr. Omre del Norwegian Computing Center de Oslo (Noruega) por el asesoramiento teórico e informático referente a los algoritmos de cálculo de los estimadores alternativos. Los resultados presentados en este estudio forman parte de los obtenidos en el Proyecto de Investigación PG 89/0015 fi-

nanciado por la CICYT. El trabajo ha sido realizado en el seno del Grupo de Investigación de la Junta de Andalucía «Geoestadística y Teledetección».

Referencias

- Castillo Martín, A. (1986). *Estudio Hidroquímico del Acuífero de la Vega de Granada*. Tesis Doctoral, Univ. de Granada, 387 págs.
- Cressie, N. y Hawkins, D. M. (1980). Robust Estimation of the Variogram: I. *Math. Geology*, 12-2, 115-125.
- Dowd, P. A. (1985). The Variogram and Kriging: Robust and Resistant Estimators. En: *Geostatistics for Natural Resources Characterization*. Verly et al. (eds.), Reidel, Dordrecht, 91-106.
- Jiménez Espinosa, R. y Chica Olmo, M. (1992). Influencia de Valores Extremos en la Estructuración Espacial de Variables Geoquímicas. *III Congreso Geológico de España*, 2, 503-508.
- Matheron, G. (1963). Principles of Geostatistics. *Economic Geology*, 58, 1246-1266.
- Omre, H. (1985). Alternative Variogram Estimators in Geostatistics. *PhD Thesis*. Stanford Univ.
- Srivastava, R. M. y Parker, H. M. (1989). Robust Measurement of Spatial Continuity. *Geostatistics*, Armstrong et al. (eds.), 1, Kluwer Academic Publishers, 295-308.
- Wegman, E. J. (1972). Non-parametric Probability Density Estimation. A summary of available methods. *Technometrics*, 14-3, 533-546.

Recibido el 1 de septiembre de 1992
Aceptado el 15 de septiembre de 1992

APENDICE

La notación empleada en este trabajo está basada en la usada por Omre (1985). A continuación se indican algunos conceptos básicos empleados en el artículo.

La función aleatoria bajo estudio se define como $\{Z(x); x \in A\}$, donde x determina la localización espacial que varía a lo largo del dominio A , en un espacio uni, bi o tridimensional. Por otra parte, la realización de esta función aleatoria, variable aleatoria, se nota como $\{z(x); x \in A\}$. Si consideramos otra localización, $x+h$, separada de x por un vector de distancias h , $Z(x)$ y $Z(x+h)$ se asume que dependen sólo de h , bajo las hipótesis de estacionaridad de segundo orden.

Las observaciones de una función aleatoria definen un conjunto de variables aleatorias:

$$S: \{Z^0(x_i); i = 1, N \mid x_i \in A; i = 1, N\}$$

El superíndice «0» indica que la función aleatoria no necesariamente siempre está correctamente observada, pudiendo aparecer algunas observaciones erróneas.

La correspondiente realización es:

$$s: \{z^0(x_i); i = 1, N \mid x_i \in A; i = 1, N\}$$

Para un paso dado h , se puede definir el siguiente conjunto de pares:

$$D_h: \{(i, j) \mid x_i - x_j = h \text{ ó } x_i - x_j = -h; i, j = 1, N\}$$

N_h es el número de elementos en D_h .

El correspondiente conjunto de variables aleatorias es:

$$S_h: \{(Z^0(x_i), Z^0(x_j)) \mid (i, j) \in D_h\}$$

Bajo la hipótesis estacionaria, se pueden definir las funciones de distribución acumuladas (FDA) univariante y bivalente de la función aleatoria:

$$F(z) = \text{Prob}\{Z(x) \leq z\} \quad \forall x \in A$$

$$F_h(z_1, z_2) = \text{Prob}\{Z(x) \leq z_1 \text{ y } Z(x+h) \leq z_2\} \quad \forall x \in A \cap A_h$$

Las correspondientes funciones de densidad de probabilidad (fdp) son:

$$f(z)dz = \text{Prob}\left\{z - \frac{dz}{2} \leq Z(x) \leq z + \frac{dz}{2}\right\} \quad \forall x \in A$$

$$\begin{aligned} f_h(z_1, z_2)dz_1dz_2 &= \\ &= \text{Prob}\left\{z_1 - \frac{dz_1}{2} \leq Z(x) \leq z_1 + \frac{dz_1}{2} \text{ y } \right. \\ &\left. z_2 - \frac{dz_2}{2} \leq Z(x+h) \leq z_2 + \frac{dz_2}{2}\right\}; \quad \forall x \in A \end{aligned}$$